Definitions.

정의 1 *Let $\phi : M \to N$ be a $\mathcal{C}^\infty$ map.*
(1)ϕ is an immersion if $d\phi_p$ is injective for $\forall p \in M$.
(2)(M, ϕ) is a submanifold of N if ϕ is an injective immersion.
(3)ϕ is an embedding if ϕ is an injective immersion which is also a topological embedding.
(4) ϕ is a submersion if $d\phi_p$ is surjective for $\forall p \in M$.

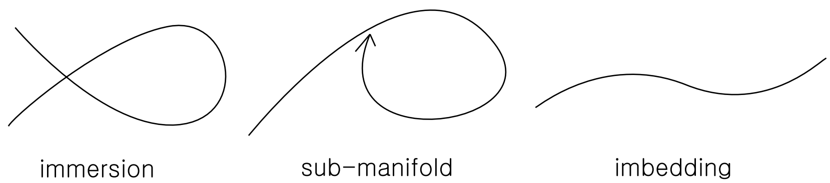

그림 15

예를 들어 projection map은 submersion이 된다.

Local picture

보조정리 1 *$f : U(\subset \mathbb{R}^m) \to \mathbb{R}^n, \mathcal{C}^\infty$ and has constant rank r on a neighborhood of $p \in U$. Then $\exists$a rectangular coordinate charts x about p and y about $f(p)$ such that*

$$(y \circ f \circ x^{-1})(a_1, \cdots, a_m) = (\overbrace{a_1, \cdots, a_r, 0, \cdots, 0}^{n}).$$

증명 May assume $det(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}) \neq 0$, $i, j = 1, \cdot\cdot, r$ on U by rearranging coordinates u_i on $\mathbb{R}^m$ and $\mathbb{R}^n$ and by restricting U.
Define $x : U \to \mathbb{R}^m$ by $x(u) = (f_1(u), \cdot\cdot, f_r(u), u_{r+1}, \cdot\cdot, u_m)$, then

$$Dx = \begin{pmatrix} (\frac{\partial f_i}{\partial u_j})_{r\times r} & * \\ 0 & I \end{pmatrix}_{m\times m} : \textit{ nonsingular}$$

By the inverse function theorem, x is a coordinate chart on a neighborhood "U" of p. Let $x(p) = (a, b)$ and V_r, V_{m-r} as in the picture so that $V_r \times V_{m-r} \subset dom(x^{-1})$.

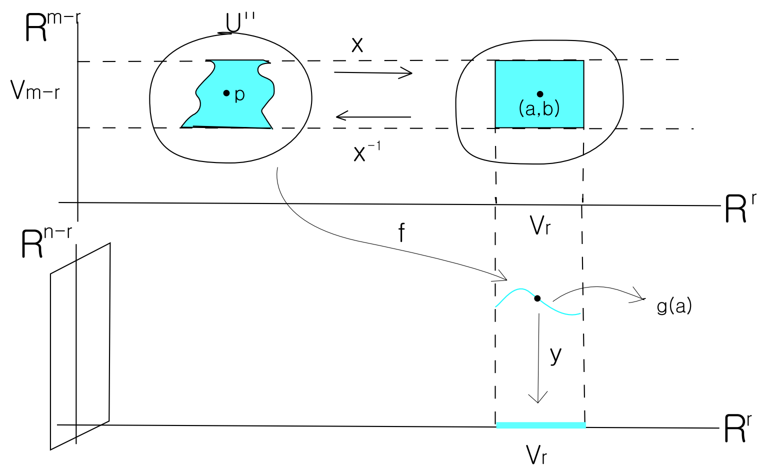

그림 16

$(a,b) \overset{x^{-1}}{\mapsto} (h(a,b),b) \overset{x}{\mapsto} (f_{1,\cdots,r}(h(a,b),b),b) = (a,b)$
$\Rightarrow f_{1,\cdots,r}(h(a,b),b) = a$ (independent of b)
$\Rightarrow (f \circ x^{-1})(a,b) = (a, f_{r+1,\cdot\cdot,n}(h(a,b),b))$
Consider

$$D(f \circ x^{-1}) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ * & (\frac{\partial(f_i \circ x^{-1})}{\partial u_j}) \end{bmatrix}_{i=r+1,\cdot\cdot,n \text{ and } j=r+1,\cdot\cdot,m}$$

$rank\ \ D(f \circ x^{-1}) = rank\ Df = r$ at $\forall p$ of U.
$\therefore (\frac{\partial(f_i \circ x^{-1})}{\partial u_j}) = 0$ for $i = r+1, \cdot\cdot, n$ and $j = r+1, \cdot\cdot, m$.(i.e., $\frac{\partial(f_{r+1\cdot\cdot,n} \circ x^{-1})}{\partial b} = 0$)
$\therefore f_{r+1,\cdot\cdot,n} \circ x^{-1}(a,b) = f_{r+1,\cdot\cdot,n}(h(a,b),b) = g(a)$ (i.e., independent of b) for some $\mathcal{C}^\infty$ function g.
Define coordinate chart y on $V_r \times \mathbb{R}^{n-r}$ by $y(a,c) = (a, c - g(a))$, then
$(y \circ f \circ x^{-1})(a,b) = y(a, g(a)) = (a, 0)$ and hence
$(y \circ f \circ x^{-1})(a_1, \cdots, a_r, a_{r+1}, \cdot\cdot, a_m) = (a_1, \cdot\cdot, a_r, 0, \cdot\cdot, 0)$ on $V_r \times V_{m-r}$. □

따름정리 2 *$\phi : M^m \to N^n$ is $\mathcal{C}^\infty$, $d\phi$ has constant rank r on neighborhood of $p \in M$. Then $\exists$ rectangular coordinate charts x about p, y about $f(p)$ such that $(y \circ \phi \circ x^{-1})(a_1, \cdots, a_m) = (a_1, \cdot\cdot, a_r, 0, \cdot\cdot, 0)$.*

따름정리 3 *$\phi : M^m \to N^n$, $\mathcal{C}^\infty$, is an immersion($m \leq n$).*
$\Rightarrow \forall p \in M, \exists$ rectangular coordinate charts x about p, y about $f(p)$ such that $(y \circ \phi \circ x^{-1})(a_1, \cdots, a_m) = (a_1, \cdot\cdot, a_m, 0, \cdot\cdot, 0)$

증명 $d\phi$가 injective하므로 rank가 m이고 따라서 바로 위의 정리에 따르면 된다. □

따름정리 4 *$\phi : M^m \to N^n, \mathcal{C}^\infty$, is a submersion $(m \geq n)$ then $\forall p \in M$, $\exists$ rectangular coordinate charts x about p, y about $f(p)$ such that $(y \circ \phi \circ x^{-1})(a_1, \cdot\cdot, a_n, \cdot\cdot, a_m) = (a_1, \cdots, a_n)$.*

Remark. Hence an immersion is locally an inclusion and so embedding.(the local topology is the same as that of a slice)

따름정리 5 *(1) $i : M^m \hookrightarrow N^n$ is a submanifold*
$\Leftrightarrow \forall p \in M, \exists$ rectangular coordinate chart (U, x) about p such that $x(p) = 0$, and $V = \{p \in U \mid x_{m+1}(p) = \cdots = x_n(p) = 0\}$ is a neighborhood of p in M and $(x_1|_V, \cdots, x_m|_V)$ is a coordinate chart of M.

(2) $i : M^m \hookrightarrow N^n$ is an embedding
$\Leftrightarrow \forall p \in M, \exists$ rectangular coordinate chart (U, x) about p such that $x(p) = 0$, $V = \{p \in U \mid x_{m+1}(p) = \cdots = x_n(p) = 0\}$ is a neighborhood of p in M, $(x_1|_V, \cdots, x_m|_V)$ is a coordinate chart of M and $M \cap U = V$.

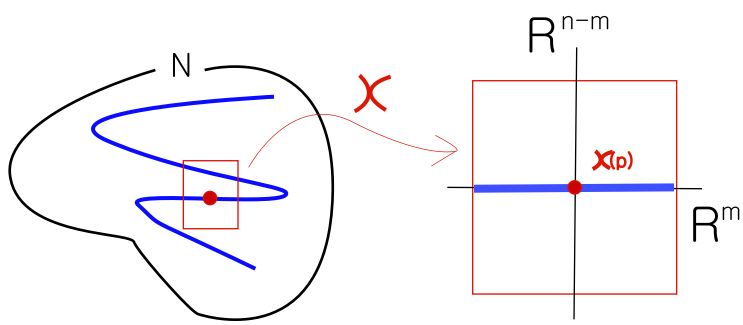

그림 17

증명 (1)의 $\Rightarrow$ 는 따름정리 3에 의해 잡을 수 있는 coordinate chart들과 local inclusion map을 이용하면 되고, $\Leftarrow$는 i가 locally immersion이라는 사실로부터 당연하다.
(2)의 $\Rightarrow$를 보이자. (1)의 내용을 만족하면서 $M \cap U = V$ 를 만족하는 U가 있음을 보이면 된다. embedding은 immersion이기도 하므로 (1)의 내용을 만

족하는 U가 존재하고, 이에 대해 $i(V)$를 생각해보자. i는 embedding이므로 $i(V)$는 $i(M)$에서 open이다. 따라서 $i(V) = i(M) \cap U'$ (U' is open in N) 을 알 수 있고, 우리가 원하는 "U"를 "U" $= U \cap U'$으로 두면 된다. (rectangular coordinate를 잡으려면 다시 "U" 안에서 더 작은 p의 rectangular 근방을 잡으면 된다.)
(2)의 $\Leftarrow$을 보이기 위해서는 $i(open) = open$ in $i(M) = M$ 임을 보이면 된다. 그런데 $i(V) = V = M \cap U$ 에서 U가 N의 open set이므로 $M \cap U$는 $i(M) = M$에서 open이 된다. basic open set에 대해 $i(basic\ open) = open$을 만족하므로 i가 open map(onto $i(M)$)임을 알 수 있다.

□

Remark. Corollary 3 shows *the uniqueness of smooth structure on a submanifold* i.e., if a subset $M \subset N$ has a topology, then there is at most one smooth structure on M such that $i : M \hookrightarrow N$ is a submanifold.

증명 두 개의 $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2$가 $i : M \hookrightarrow N$ 를 submanifold로 만드는 smooth structure라고 하자. 두 structure 에 대해 i는 submanifold이므로 따름정리5의 (1)에 따라 chart $(U_1, \phi_1), V_1, (U_2, \phi_2), V_2$를 잡을 수 있다.
$(U_1, \phi_1) \in \mathcal{F}_1, (U_2, \phi_2) \in \mathcal{F}_2$ 일 때 $U_1 \cap U_2$를 생각해보자.
원래 $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}(N)$이므로 $\mathcal{C}^\infty$인 transition map $\phi_2 \circ \phi_1^{-1}$이 존재한다. 이것을 $\phi_1(V_1)$에 restriction시키면 이것 역시 $\mathcal{C}^\infty$이다. 왜냐하면 우리가 구하는 $\phi_1(V_1)$에서 $\phi_2(V_2)$로 가는 transition map $\phi_2|_{V_2} \circ \phi_1|_{V_1}^{-1}$은 $\pi \circ \phi_2 \circ \phi_1^{-1} \circ i$ 로 표현되기 때문이다. 따라서 $\phi_1|_{V_1}$, $\phi_2|_{V_2}$는 $\mathcal{C}^\infty$-related되어 있고 $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$이다. □

명제 6 *Let $\varphi : M \to N$ be $\mathcal{C}^\infty$, P is a submanifold of N and $\varphi(M) \subset P$. If $\varphi : M \to P$ is continuous, then φ is $\mathcal{C}^\infty$.*

숙제 5. 위 명제를 증명하라.

위 명제에서 연속성이 필요한 이유를 다음과 같은 예에서도 볼 수 있다.

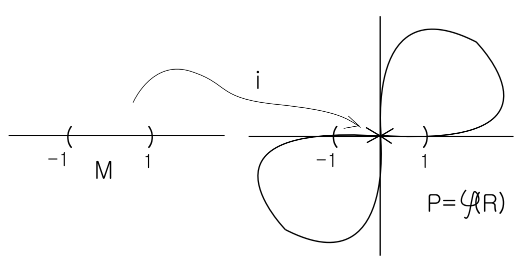

그림 18

$N = \mathbb{R}^2$,$M = (-1,1)$이고 P를 figure eight으로 보면 이 때 $i : M \to N$은 $\mathcal{C}^\infty$ 이나 $M \to P$로 가는 map은 불연속이다.