Regular value and transversality.

정의 1 *$\varphi : M^m \to N^n$, $\mathcal{C}^\infty$, $q \in N$ is called a* **regular value** *of φ if $d\varphi_p$ is surjective for $\forall p \in \varphi^{-1}(q)$.*

Note. $q \in N \backslash im\varphi$ is also a regular value.
$q \in N$ is a *critical value* if it is not regular.

정리 1 *$\varphi : M^m \to N^n, \mathcal{C}^\infty$. If $q \in N$ is a regular value of φ, then $P = \varphi^{-1}(q)$ is $\emptyset$ or an embedded submanifold of M of dimension $m-n$. And $T_pP = ker\ d\varphi_p$.*

증명 $p \in P = \varphi^{-1}(q)$ 라고 두자. $d\varphi_p$는 p의 근방에서 onto이므로 앞절의 따름정리 4에 따라 p, q에서의 chart (U, x)와 (V, y)가 존재해서 $y \circ \varphi \circ x^{-1}(a_1, \cdots, a_m) = (a_1 \cdots, a_n)$을 만족한다.

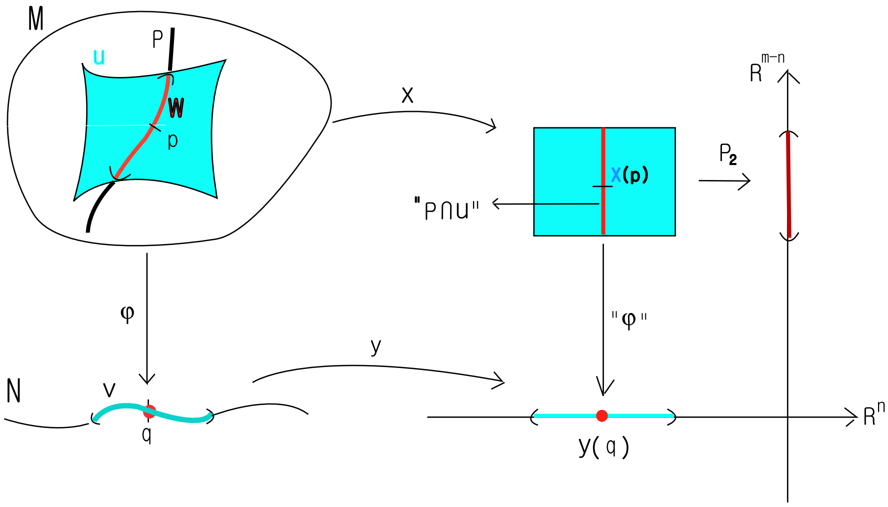


그림 19

따라서 P에 $x_2|_W = (x_{n+1}|_W, \cdots, x_m|_W)$와 $W = U \cap P$를 coordinate chart로 주자. 그러면 이 때 P의 subspace topology에 대해 W는 open set 이므로 이런 chart들에 의해 topological manifold가 된다. 이렇게 정의된 chart들이 P에 smooth structure를 주는 것을 보이기 위해 두 chart $x_2|_W, x_2'|_W$가 서로 $\mathcal{C}^\infty$-related임 을 보이자. 실제로 $x_2|_W \circ x_2'|_W^{-1} = \pi \circ x \circ x'^{-1} \circ i$이고 이는 $\mathcal{C}^\infty$이므로 $\mathcal{C}^\infty$-related임을 알 수 있다. 또한 앞절의 따름정리 5에 따라 P는 submanifold가 된다.

M에 embedded된다는 것은 따름정리 5에 따라 $U \cap P = W$를 만족하는 global chart U가 존재한다는 사실로부터 알 수 있다. $\square$

Remark. 위 정리에서 M이 second countable하다고 가정하면 P도 second countable하다.

Examples. $\varphi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n = (\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$.
$d\varphi_p$ has rank $n \Leftrightarrow d\varphi_p : T_p\mathbb{R}^m \to T_{\varphi(p)}\mathbb{R}^n : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ is onto.

$$\left(\quad recall \quad d\varphi_p = \begin{pmatrix} \nabla\varphi_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \nabla\varphi_n \end{pmatrix} \quad \right)$$

$\Leftrightarrow \nabla\varphi_1(p), \cdots, \nabla\varphi_n(p)$ are linearly independent.

특히 $n = 1$ 일 때의 조건은 $\nabla\varphi(p) \neq 0$ 이다. 예전에 이미 $f(x) = |x|^2 - 1$에 대해($\nabla f \neq 0$) $M = f^{-1}(0)$이 smooth manifold가 됨을 보인 적이 있다. 이는 위의 특별한 경우에 속한다. 이것이 일반화될 때의 조건이 바로 $\nabla\varphi_1(p), \cdots, \nabla\varphi_n(p)$ 가 linearly independent인 조건이다.

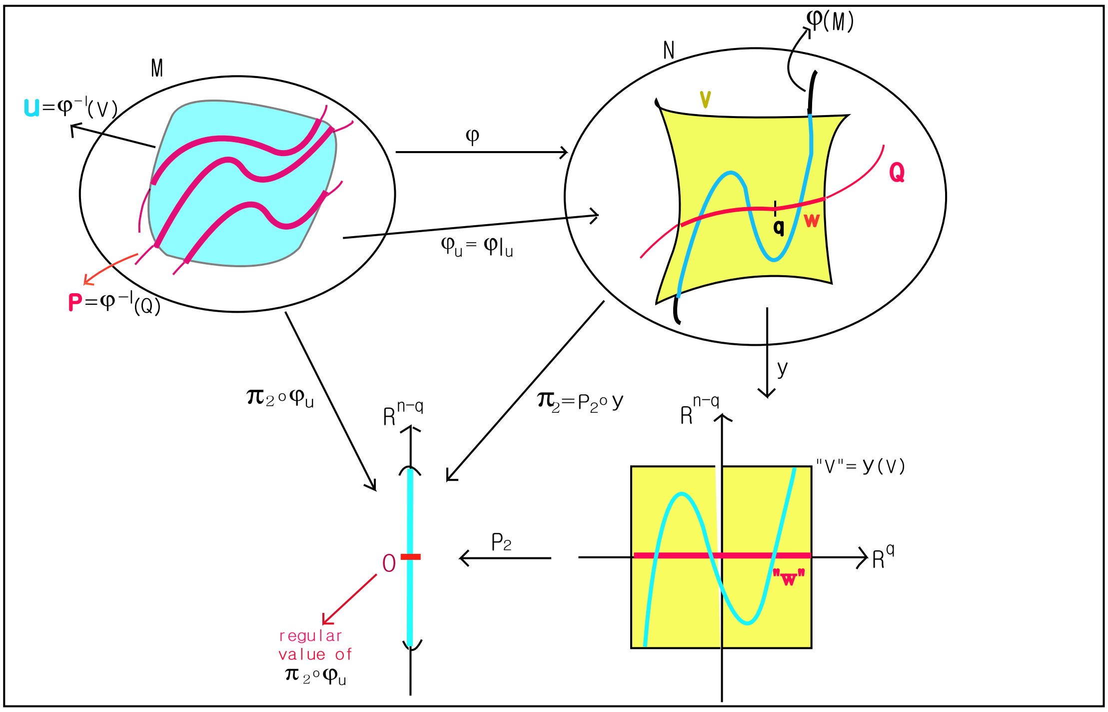
정의 2 *$\varphi : M^m \to N^n$, $\mathcal{C}^\infty$ and $i : Q \hookrightarrow N$ is a sbmanifold. φ is said to be* **transversal** *to Q ($\varphi \pitchfork Q$) if $im(d\varphi_p) + T_{\varphi(p)}Q = T_{\varphi(p)}N$, $\forall p \in \varphi^{-1}(Q)$.*

위의 정의로 정리 1을 더 일반화하여 $\varphi^{-1}(Q)$가 submanifold가 됨을 보이자.

정리 2 *$\varphi : M^m \to N^n$, $\mathcal{C}^\infty$ and $i : Q \hookrightarrow N$, a (embedded, respectively) submanifold, and let $\varphi \pitchfork Q$. Then $P = \varphi^{-1}(Q)$ is a (embedded, respectively) submanifold of M with codim P = codim Q and $T_pP = d\varphi_p^{-1}(T_{\varphi(p)}Q)$.(P is second countable if Q is second countable.)*

증명
그림 20

Q가 submanifold 이므로 $\forall q \in Q$에 대해 위 그림과 같이 chart (V, y) 가 존재해서 local chart W를 준다. W를 slice neighborhood라고 부르자. 이 때 대응되는 $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^q$의 open set을 각각 "$V$","$W$" 라고 두자. 또 projection map



$p_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n-q}$ 를 생각해서 $p_2 \circ y = \pi_2$ 라고 놓자.
이제 $\varphi^{-1}(V) = U$ 라고 놓고 φ를 U에 restriction시킨 φ_U에 대해 $\pi_2 \circ \varphi_U$를 생각해보자. $\pi_2 \circ \varphi_U$는 $U \to \mathbb{R}^{n-q}$ 로 가는 함수이고 $\forall p \in P \cap U$를 0으로 보낸다. 이 때 0은 $\pi_2 \circ \varphi_U$의 regular value가 되므로(transversality $\varphi \pitchfork Q$로부터 $d(\pi_2 \circ \varphi_U)$는 onto이기 때문이다.) 정리 1을 쓸 수 있다. 따라서 $(\pi_2 \circ \varphi_U)^{-1}(0)$은 U의 submanifold가 된다. $(\pi_2 \circ \varphi_U)^{-1}(0) = (\varphi_U^{-1} \circ \pi_2^{-1})(0) = \varphi_U^{-1}(W) = \varphi^{-1}(W)$는 U의 embedded submanifold가 된다.

위와 같이 locally는 잘 정의되었고 이제 각 $\forall q \in Q$에 대해 위와 같이 얻어진 submanifold $\varphi^{-1}(W)$들을 잘 붙여서 P를 얻어낼 수 있다. P가 submanifold가 됨을 보이자.

1. Topology of P.
$\forall q \in Q$에 대해 존재하는 slice neighborhood W를 위와 같이 생각하고 $Q = \cup W_i$인 W_i들을 모아 $\{W_i\}, \{V_i\}$들을 생각하자. (만일 Q가 second countable인 경우에는 $\{W_i\}$ 를 conuntable이라고 볼 수 있다.) 그러면 각 $\varphi^{-1}(W_i)$들은 $U_i = \varphi^{-1}(V_i)$의, 따라서 M의 embedded submanifold가 된다. 즉 각 $\varphi^{-1}(W_i)$에는 M의 subspace topology가 있으므로 $P = \cup \varphi^{-1}(W_i)$에 coherent topology를 주자. 이를 위해 다음 두 가지를 보이면 충분하다.

(check 1) $\varphi^{-1}(W_i)\cap\varphi^{-1}(W_j)$의 $\varphi^{-1}(W_i)$, $\varphi^{-1}(W_j)$ 에서의 subspace topology는 각각 모두 M에서의 subspace topology와 같다. 따라서 그 둘은 topology가 같다.
(check 2) $\varphi^{-1}(W_i)\cap\varphi^{-1}(W_j)$ 는 $\varphi^{-1}(W_i)$에서 open임을 보이자. 먼저 $\varphi| : \varphi^{-1}(W_i) \to W_i$는 연속함수이다. W_i의 topology는 N의 subspace topology이고, $\varphi^{-1}(W_i)$의 topology는 M의 subspace topology 이므로 $\varphi|$는 연속이다.
$\varphi^{-1}(W_i)\cap\varphi^{-1}(W_j) = \varphi^{-1}(W_i\cap W_j)$ 이고 $W_i\cap W_j$는 open in W_i 이므로 결국 $\varphi^{-1}(W_i)\cap\varphi^{-1}(W_j)$ 는 $\varphi^{-1}(W_i)$에서 open이다.
따라서 P에 coherent topology를 줄 수 있다. 한 가지 주의할 것은 위와 같이 준 coherent topology는 subspace topology보다도 finer 하다는 점이다.

숙제 6. Note that coherent topology of $P \supset$ subspace topology of P. i.e., $i : P \hookrightarrow M$ is continuous.

2. Smooth structure of P.
이는 submanifold 의 smooth structure에 대한 *uniqueness* 로 보일 수 있다. 즉 $\varphi^{-1}(W_i)\cap\varphi^{-1}(W_j)$의 smooth structure는 $\varphi^{-1}(W_i)$로부터 얻을 수도 있고, $\varphi^{-1}(W_j)$로부터도 얻을 수 있다. 그러나 *uniqueness of smooth structures of submanifold*에 의해 이 두 structure는 같아야 한다. 따라서 $P = \cup\varphi^{-1}(W_i)$를 덮는 각 $\varphi^{-1}(W_i)$들에 대해 smooth structure를 주되 겹치는 부분에서는 structure가 서로 같으므로 전체적으로 P에 smooth structure를 주게 되고 M의 submanifold가 된다.

3. Q is embedded$\Rightarrow$ P is embedded.
Q가 embedded submanifold 라면 각 $q \in Q$에 대해 $V\cap Q = W(\textit{slice neighborhood})$가 되는 근방 V를 잡을 수 있다. P가 embedding됨을 보이려면 P의 coherent topology가 subspace topology에 포함됨을 보이면 충분하다. 왜냐하면
$i : P$ *with subspace topology* $\hookrightarrow M$은 당연히 embedding 이므로 만일 *coherent topology* = *subspace topology*만 보이면 P는 (coherent topology로 써) embedded submanifold가 된다.
coherent topology $\subset$ *subspace topology*를 보이자.
coherent topology에서의 open set은 $\varphi^{-1}(W)$들의 open subset들에 의해 generate되고 $\varphi^{-1}(W) = \varphi^{-1}(V\cap Q) = \varphi^{-1}(V)\cap\varphi^{-1}(Q)$이다. $\varphi^{-1}(V)\cap\varphi^{-1}(Q) = U\cap P$이고 이를 M에서의 subspace topology로 보자면 U는 M에서 open이므로 위는 P *with subspace topology*에서 open이다.
즉 *coherent topology* $\subset$ *subspace topology* 이고 따라서 위 숙제 6에 의해 두 topology는 같다. 그러므로 P 역시 embedded submanifold가 된다.

마지막으로 $codim\, P = codim\, \varphi^{-1}(W) = n - q = codim\, Q$ 이고,

$$\begin{aligned} T_pP &= ker\, d(\pi_2 \circ \varphi_U)_p \quad (by\ thm\, 1.) \\ &= ker\, (d\pi_2 \circ d\varphi_U)_p \\ &= (d\pi_2 \circ d\varphi_U)^{-1}(0) \\ &= d\varphi_p^{-1}(T_{\varphi(p)}Q) \quad (d\pi_2^{-1}(0) = T_{\varphi(p)}W = T_{\varphi(p)}Q) \end{aligned}$$

□

정의 3 *Let P and Q be submanifolds of M. P and Q are transversal, $P \pitchfork Q$, if $i : P \hookrightarrow M$ is transversal to Q. i.e., if $\forall p \in P \cap Q$, $T_pP + T_pQ = T_pM$ holds.*

따름정리 3 *If two(embedded respectively) submanifold P and Q of M are transversal, then their intersection $P \cap Q$ is a (embedded respectively) submanifold of P,Q and hence of M.*

증명 $P \cap Q = i_p^{-1}(Q)(i_p : P \hookrightarrow M = \text{inclusion map})$이고 Q는 M의 submanifold 이므로 정리 2를 쓰면 $i_p^{-1}(Q)$ 역시 submanifold가 된다. P에 대해서도 마찬가지이고 embedded submanifold의 경우 역시 마찬가지이다. □