Examples.

1. $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.
일반적으로 $f : M \to \mathbb{R}$에 대해 다음 내용이 성립한다.

$$f_*(p) \text{ is surjective} \Leftrightarrow f_*(p) \neq 0 \Leftrightarrow df_p \neq 0$$

이를 이용하여 regular value를 찾을 수 있다. 예를 들어 $f(x) = |x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$에 대해 $df = \sum 2x_i dx_i$이고 $x \neq (0, \cdots, 0)$ 에서는 $f_*(p)$가 onto이다. 따라서 0 이외의 점은 모두 regular value 이고 특히 $M = f^{-1}(1)$은 $\mathbb{R}^n$의 submanifold가 된다.

2. $f = det : M(n, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \mathcal{C}^\infty$**.**
$M(n, \mathbb{R})$는 $\mathbb{R}^{n^2}$으로 볼 수 있고 det 에 대해 1에서와 같이 regular value를 찾자.
$df_A(X) = X_A f =$directional derivative of f at A in the direction of X.
실제 계산을 위해 curve $\sigma(t) = A + tX$를 잡자. 그러면
$df_A(X) = X_A f = \frac{d}{dt}|_0 (f \circ \sigma) = \frac{d}{dt}|_0 det(A + tX) = \frac{d}{dt}|_0 det(a_1 + tx_1, \cdots, a_n + tx_n)$
여기서 각 a_i들은 A의, x_i들은 X의 열벡터들이다. (즉 $X = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$).
det의 정의에 따라 미분하면 위 식은
$df_A(X) = det(x_1, a_2, \cdot\cdot, a_n) + det(a_1, x_2, \cdot\cdot, a_n) + \cdots + det(a_1, \cdot\cdot, a_{n-1}, x_n)$.
특히 $A = I$ 인 경우 $X_I(det) = \frac{d}{dt}|_0 det(I + tX) = x_{11} + x_{22} + \cdots + x_{nn}$.
$\therefore df_I(X) = tr(X)$.

Claim : 0 is the only critical value of det.

$df_A(X) = X_A f = \frac{d}{dt}|_0 det(A+tX) = \frac{d}{dt}|_0 det(I+tXA^{-1}) detA = detA \cdot tr(XA^{-1})$.
우리는 $det(A) \neq 0$인 A에 대해 $df_A(X) \neq 0$임을 원하므로 $tr(XA^{-1}) \neq 0$이 되게 하는 X를 찾으면 된다. $det(A) \neq 0$ 이면 $A \neq 0, A^{-1} \neq 0$이고 따라서 0이 아닌 A^{-1}의 원소 a_{ij}가 존재한다. 이 때 $X = (x_{ij})$를 $x_{ji} = 1$이고 나머지는 모두 0인 행렬로 주면 $tr(XA^{-1}) = a_{ij} \neq 0$을 만족한다. 따라서 위 claim이 성립하므로 $f^{-1}(k)(k \neq 0)$는 $\mathbb{R}^{n^2}$상의 submanifold가 되고 특히 $f^{-1}(1)$을 special linear group $Sl(n, \mathbb{R}) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid detA = 1\}$ 이라고 한다. 사실 $Sl(n, \mathbb{R})$는 $Gl(n, \mathbb{R})$의 submanifold인데 $Gl(n, \mathbb{R})$ 자체가 $\{A \in M(n, \mathbb{R}) \mid detA \neq 0\}$으로 표현되므로 $\mathbb{R}^{n^2}$ 내에서 open subset이 된다. 따라서 $Gl(n, \mathbb{R})$은 $\mathbb{R}^{n^2}$의 submanifold(of $dim\, n^2$)이고 $Sl(n, \mathbb{R})$는 $Gl(n, \mathbb{R})$의 submanifold(of $dim\, n^2 - 1$)로 볼 수 있다.
Remark. $A = (a_{ij})$ 에 대해 $\widetilde{a_{ij}}$를 a_{ij}의 cofactor로 두자. $\widetilde{A} = (\widetilde{a_{ij}})$ 에 대해 $A^{-1} = \frac{1}{det\, A} {}^t\widetilde{A}$ 이고 위에서 $df_A(X) = tr(X^t \widetilde{A}) = < \widetilde{A}, X >$ 로 표현된다. 이 사

실로부터 df_A를 n^2개의 기저로 표현하면
$$\sum_{i,j} \frac{\partial f}{\partial x_{ij}} dx_{ij} = df_A = \sum_{i,j} \widetilde{a_{ij}} dx_{ij} \qquad \therefore \tfrac{\partial f}{\partial x_{ij}} = \widetilde{a_{ij}}$$
즉 $\widetilde{a_{ij}}$를 det의 A에서의 ij번째 편도함수로 볼 수 있다.
(**Exercise.** 이것을 직접 check해보라.)

숙제 7. $O(n) = \{A \in M(n, \mathbb{R}) | A\,{}^t\!A = 1\}$.
Show $O(n)$ is a submanifold of $Gl(n, \mathbb{R}) \subset M(n, \mathbb{R})$.
(*Hint.* $f : Gl(n, \mathbb{R}) \to S(n, \mathbb{R}) = \{A | A = {}^t\!A\}, \;\; f(A) = A\,{}^t\!A$.
Show $I \in S(n, \mathbb{R})$ is a regular value.)

4. Fundamental theorem of algebra.
Let $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ be a polynomial function of z with degree> 0. Then p is onto.
(hence $\exists\, z_0$ such that $p(z_0) = 0$)

증명**숙제 8.**(다음 step들에 따라 증명해 보라.)
(1) Show that p can be extended smoothly to $\mathbb{S}^2(= \mathbb{C} \cup \{\infty\})$.
$p : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ 에서 ∞점이 문제인데 이를 ∞로 보내면 smooth하게 만들 수 있다.(∞점에서 coordinate chart를 이용하여 이를 보여라.)
(2) The number of zeroes of p is finite $\leq$ $deg\, p$.(obvious)
(3) p는 manifold에서 manifold 로 가는 smooth map이므로 p_*를 생각할 수 있고 실제로 p_*는 다음과 같은 식을 만족한다.
$p_*(z)(v) = p'(z) \cdot v$ (여기서 tangent vector v를 compliex number로 보았을 때)
(2),(3) 으로부터 critical point의 개수는 finite임을 알 수 있고 따라서 critical value 역시 finite이다. 그러므로 regular value들의 집합은 connected이다.
(4) $\sharp\, p^{-1}(w) = constant$ for all regular value $w \in \mathbb{C}$. (Show it is locally constant and note that the set of regular values is connected.)