Vector field.

Let $\pi : TM \to M$ be a canonical projection.
$X_p \mapsto p$

정의 1 *A* **vector field** *X on $A \subset M$ is a "section" of $\pi : TM \to M$ over A, i.e., A vector field is a map $X : A \to TM$ with $\pi \circ X = id$.*

그림 21

즉 vector field X는 각 점 p에 대해 X_p를 대응시키는 map이다.

정리 1 *Let X be a vector field. Then the followings are equivalent;*
(1) X is $\mathcal{C}^\infty$.
(2) $(U, x)$is a coordinate chart on M and $X(p) = \sum a_i(p)\frac{\partial}{\partial x_i}(p)$ on U
$\Rightarrow a_i \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$.
(3) V is open in M, $f \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R}) \Rightarrow Xf \in \mathcal{C}^\infty(V, \mathbb{R})$.

증명 (1) $\Rightarrow$ (2)
$a_i(p) = Xx_i(p) = dx_i(X_p)$ and dx_i is a coordinate function on $\pi^{-1}(U) = \widehat{U}$
$\therefore dx_i$ is $\mathcal{C}^\infty \Rightarrow a_i = dx_i \circ X \in \mathcal{C}^\infty(U, \mathbb{R})$.
(2) $\Rightarrow$ (3)
Xf가 locally $\mathcal{C}^\infty$임을 보이면 된다. $Xf = \sum a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}$ 인데 a_i와 f 즉 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$가 $\mathcal{C}^\infty$이므로 Xf는 locally $\mathcal{C}^\infty$이다.
(3) $\Rightarrow$ (1)

$$\begin{array}{ccc} X : U & \rightarrow & \widehat{U} = \pi^{-1}(U) \\ \varphi \downarrow & & \downarrow \hat{\varphi} \\ \varphi(U) & \overset{induced\ by\ X}{\dashrightarrow} & \varphi(U) \times \mathbb{R}^n \\ x & \mapsto & (x, a_1, \cdots, a_n) \end{array}$$

각 coordinate function이 $id, a_1, \cdots, a_n$인데 $a_i = Xx_i$이고 x_i는 $\mathcal{C}^\infty$이므로 (3)에 의해 $\forall a_i$는 $\mathcal{C}^\infty$이다. 따라서 각 coordinate function이 $\mathcal{C}^\infty$이므로 X은 $\mathcal{C}^\infty$이 된다.
$\square$

정의 2 *Let X be a $\mathcal{C}^\infty$ vector field on M. A $\mathcal{C}^\infty$ curve σ is an* **integral curve** *of X, if $\frac{d\sigma}{dt}(t) = X(\sigma(t))$ for $\forall t \in dom(\sigma)$.*

X는 local하게는 open subset of $\mathbb{R}^n$에서의 $\mathcal{C}^\infty$ vector field로 볼 수 있다.

$X = (f_1(x), \cdots, f_n(x))$(or $X = \sum f_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$)라 두면 integral curve를 찾는다는 것은 $\sigma(t) = (x_1(t), \cdots, x_n(t))$ such that $\frac{d\sigma}{dt} = X(\sigma(t))$ 를 만족하는 σ를 찾는 문제이고 곧 이는 아래의 system of o.d.e. $(*)$를 푸는 것과 같다.

$$(*) \begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = & f_1(x) \\ \quad . & \\ \quad . & \\ \quad . & \\ \frac{dx_n}{dt} = & f_n(x) \end{cases}$$

예 1. $X = y\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} = (y, 1)$으로 주어졌을 때 integral curve σ는?

$$(*) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = & y \\ \frac{dy}{dt} = & 1 \end{cases}$$

$\therefore y = t + c, x = \frac{1}{2}t^2 + ct + d.$

예 2. $X = y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} = (y, x)$ with initial condition $(x(0), y(0)) = (1, 0)$.
미분방정식을 풀면 $-\infty < t < \infty$에 대해 $\sigma(t) = (cosht, sinht)$를 얻는다.

예 1,2와 달리 비선형인 경우를 보자. 비선형인 경우 해의 존재성이 제한되거나 해가 유일하지 않을 수도 있다.

예 3. $X(x) = x^2$ on $\mathbb{R}$ with initial condition $x(0) = 1$.
$\frac{dx}{dt} = x^2 \Rightarrow \int \frac{dx}{x^2} = \int dt \qquad \therefore x = \frac{1}{1-t}.$
위 함수는 $t = -\infty$부터 $t = 1$까지만 정의된다. 따라서 $\mathbb{R}$전체에서 정의되는 해는 존재하지 않는다.

예 4. $\frac{dx}{dt} = 3x^{\frac{2}{3}}$ on $\mathbb{R}$ with initial condition $x = 0$ at $t = 0$.
미분방정식을 풀면 $x(t) = t^3$ 이지만 $x(t) \equiv 0$ 또한 해가 된다. 따라서 해가 유일하게 존재하지 않는다.