Fundamental theorem of ordinary differential equation.

정리 1 *(Fundamental theorem of o.d.e.)*
$W \subseteq \mathbb{R}^n$: open, $f : W \to \mathbb{R}^n$: "locally Lipschitz".
Given a system of o.d.e with initial condition

$$(*) \begin{cases} x' = & f(x) \\ x(0) = & x_0 \end{cases}$$

$\exists\, a > 0$ and a solution $x : (-a, a) \to W$ of (*). If x, y are solutions of (*), defined on I(= open interval) containing 0 then $x \equiv y$ on I.

정의 1 *(Lipschitz condition) $f : W \to \mathbb{R}^n$ is* **Lipschitz** *on W if $\exists\, K > 0$ such that $|f(y) - f(x)| \le K|y - x|\ \forall\, x, y \in W$. Here K is called a Lipschitz constant. $f : W \to \mathbb{R}^n$ is locally Lipschitz on W if each $x \in W$ has a neighborhood on which f is Lipschitz.*

Note. $f : W \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{C}^1 \Rightarrow f$ is locally Lipschitz.

(증명) Let $\phi(t) = f(x + t(y - x))$. Then $f(y) - f(x) = \phi(1) - \phi(0) = \int_0^1 \phi'(t)dt$.
$\therefore f(y) - f(x) = \int_0^1 Df(x + t(y - x))(y - x)dt$.
$|Df(x + t(y - x))||y - x| \le K|y - x|$ where $K = max||Df||$ on the neighborhood considered. $\therefore |f(y) - f(x)| \le K|y - x|$.

(proof of the fundamental theorem)
Key observation $(*) \Leftrightarrow x(t) = x_0 + \int_0^t f(x(s))ds$.
f is Lipschitz on $B = \{x \in W \mid |x - x_0| \le b\} \subset W$ with Lipschitz constant K and let $|f(x)| \le M$ on $\overline{B}$.
Choose $a > 0$ such that $a < min\{\frac{b}{M}, \frac{1}{K}\}$ and let $J = [-a, a]$. Construct approximation solution $u_0, u_1, \cdots$, as follows :

$u_0(t) = x_0, u_{k+1}(t) = x_0 + \int_0^t f(u_k(s))ds$, $t \in J$.

(1) $u_k(t) \in B$ *: use induction.*
$|u_{k+1}(t) - x_0| \le \int_0^t |f(u_k(s))|ds \le \int_0^t Mds = Mt < Ma < b$.

(2) $\exists L \ge 0$ *such that* $|u_{k+1}(t) - u_k(t)| \le (Ka)^k\ L,\ \forall\, k$:
$|t| < a$인 모든 t에 대해 $L = max|u_1(t) - u_0(t)|$ 로 두자. Lipschitz 조건과 induction을 쓰면

$$
\begin{aligned}
|u_{k+1}(t)-u_k(t)| &\le \int_0^t |f(u_k(s))-f(u_{k-1}(s))|ds \\
&\le \int_0^t K|u_k(s)-u_{k-1}(s)|ds \\
&\le K(Ka)^{k-1}La=(Ka)^kL.
\end{aligned}
$$

(3) $\{u_k\}$ *is a Cauchy sequence (with respect to uniform norm) :*

For $r,s>N$, $|u_r(t)-u_s(t)| \le \sum_{k=N}^{\infty} |u_{k+1}(t)-u_k(t)| \le \sum_{k=N}^{\infty}(Ka)^kL$

a의 정의에 의해 $Ka<1$ 이고 따라서 $N\to\infty$이면 위 식은 0로 간다. 따라서 u_k는 uniform limit u를 가지고 이것이 바로 우리가 찾던 해이다. 즉, $u_{k+1}(t)=x_0+\int_0^t f(u_k(s))ds$ 에서 양변에 $\lim_{k\to\infty}$ 를 취하면

$$
\begin{aligned}
u(t) &= x_0+\lim_{k\to\infty}\int_o^t f(u(s))ds \\
&= x_0+\int_0^t \lim_{k\to\infty} f(u_k(s))ds \qquad \textit{by Lebesgue's dominated convergence theorem} \\
&= x_0+\int_0^t f(u(s))ds \qquad \textit{by Lipschitz condition}
\end{aligned}
$$

따라서 u는 적분방정식, 따라서 미분방정식을 만족하고 f가 연속이므로 u는 $\mathcal{C}^1$이다.

(4) *Uniqueness :*
먼저 작은 근방에서는 $x\equiv y$가 되게 할 수 있음을 보이자.
$\exists\,\epsilon>0$ *such that* $x\equiv y$ *on* $(-\epsilon,\epsilon)$:
Choose $\epsilon>0$ such that $x(J),y(J)\in B,\ J=[-\epsilon,\epsilon]\subseteq[-a,a]$ and $\epsilon<\frac{1}{K}$.
Let $Q=\max_J |x(t)-y(t)|$ (J:compact and x,y:continuous$\Rightarrow \exists\ max.$)

$$
\begin{aligned}
&= |x(t_1)-y(t_1)| \text{ for some } t_1\in J. \\
&= \left|\int_0^{t_1} x'(s)-y'(s)ds\right| \\
&\le \int_0^{t_1} |x'(s)-y'(s)|ds \\
&\le \int_0^{t_1} |f(x(s))-f(y(s))|ds \\
&\le K\int_0^{t_1} |x(s)-y(s)|ds \\
&\le KQ\epsilon<Q \qquad : \qquad \textit{contradiction unless } Q=0.
\end{aligned}
$$

따라서 $Q=0$ 이 되는 ϵ을 잡았고 ϵ근방에서는 $x\equiv y$이다.
이제 global하게도 $x\equiv y$를 만족함을 보이기 위해 $A=\{t\in I\,|\,x(t)=y(t)\}$를 생각하자. I가 connected임을 이용해서 $A\subset I$가 open이고 closed임을 보이면 $A=I$이다. ($A\neq\emptyset$이므로)
먼저 $A=\{t\in I\,|\,x(t)=y(t)\}$꼴이므로 Hausdorff 조건에서 이는 당연히 closed이다. A가 open임을 보이기 위해 $t_0\in A$ 를 가정하자. 즉 $x(t_0)=y(t_0)=p$. 그리고 x,y는 다음 (*)의 해가 된다.

$$(*)\begin{cases} x' = & f(x) \\ x(t_0) = & p \end{cases}$$

Note. $x(t)$가 $(*)$의 해이면 $\widetilde{x}(t) = x(t+t_0)$ 역시 $(*)$의 해가 되고 이 때 initial condition은 $\widetilde{x}(0) = x(t_0) = p$이다.
$(\because)\widetilde{x}' = x'(t+t_0) = f(x(t+t_0)) = f(\widetilde{x}(t))$.

이제 $\widetilde{x}(t) = x(t+t_0), \widetilde{y}(t) = y(t+t_0)$ 라 두면, 이들은 둘 다 $(*)$의 해가 되면서 같은 initial condition $(t,x) = (0,p)$를 가진다. *uniqueness* 증명의 앞부분에서 0근방에서는 $\widetilde{x} \equiv \widetilde{y}$가 되게 할 수 있다고 했으므로 $\exists\epsilon > 0$ such that $\widetilde{x} \equiv \widetilde{y}$ on $(-\epsilon, \epsilon)$. 따라서 $x(t) \equiv y(t)$ on $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon)$이다. 즉 A에 들어가는 t_0의 근방을 잡았으므로 A는 open이다. □

Unique maximal integral curve on M.

정리 2 *Let X be $\mathcal{C}^\infty$ vector field on Hausdorff M. $\forall p \in M, \exists!$ maximal integral curve $\sigma = \sigma_p$ with $\sigma(0) = p$. i.e., $\exists$ open interval $(a(p), b(p)) \subset \mathbb{R}$ and $\sigma : (a(p), b(p)) \to M$ such that*
(1) $0 \in (a(p), b(p))$ and $\sigma(0) = p$.
(2) σ is an integral curve.
(3) If $\gamma : (c,d) \to M$ is a smooth curve with (1) and (2), then $\gamma = \sigma|_{(c,d)}$.

증명 Fundamental theorem으로부터 unique local existence 는 얻었고, 다음의 $\mathcal{I}$를 생각하자.
$\mathcal{I} = \{I = (a,b) \,|\, \exists\sigma : (a,b) \to M \ : \ \textit{integal curve}, \sigma(0) = p\}$.
만일 두 개의 curve $\sigma : I \to M, \tau : J \to M$가 (1),(2)를 만족한다면, uniqueness에 의해 $I \cap J$에서는 $\sigma \equiv \tau$여야 한다. 즉 겹치는 곳에서는 항상 같으므로 잘 붙여나갈 수 있다. 이제 $(a(p), b(p)) = \bigcup_{I \in \mathcal{I}} I$ 라 두고 σ를 "union" of integral curves라 두면 된다.

□