Global flow.

Let X be a $\mathcal{C}^\infty$ vector field on M.
For $p \in M$, let $\alpha_p : J_p = (a(p), b(p)) \to M$ be the maximal integral curve through $p = \alpha_p(0)$.
Let $\mathcal{D} := \{(t,p) \in \mathbb{R} \times M \,|\, t \in J_p \ , \ p \in M\}$, $\alpha : \mathcal{D} \to M$ defined by $\alpha(t,p) = \alpha_p(t)$ is called the (global) flow of X.

정리 1 *$\mathcal{D} \subset \mathbb{R} \times M$ and $\alpha : \mathcal{D} \to M$ as above. Then*
(1) $\mathcal{D}$ is open.
(2) α is $\mathcal{C}^\infty$.
(3) $\alpha(t,p) = \alpha_p(t)$ gives the maximal integral curve with $\alpha_p(0) = p$.
(4) $\alpha(t, \alpha(s,p)) = \alpha(t+s, p)$ for points in $\mathcal{D}$ and $J_{\alpha(t,p)} = J_p - t$.

증명 (3)은 정의로부터 당연하고, (4)를 증명하자.
먼저 $\sigma(t)$가 integral curve(with $\sigma(0) = p$)라면 $\widetilde{\sigma}(t) = \sigma(t+a)$ 역시 integral curve(with $\widetilde{\sigma}(0) = \sigma(a)$) 이다.
$\because$ a만큼 traslation시키는 f에 대해 $\widetilde{\sigma} = \sigma \circ f$ 로 보면,

$$\begin{aligned}\frac{d\widetilde{\sigma}}{dt}(t) &= \widetilde{\sigma}_*(\tfrac{d}{dt}|_t)\\ &= \sigma_* f_*(\tfrac{d}{dt}|_t)\\ &= \sigma_*(\tfrac{d}{dt}|_{t+a})\\ &= \tfrac{d\sigma}{dt}(t+a)\\ &= X(\sigma(t+a))\\ &= X(\widetilde{\sigma}(t))\end{aligned}$$

$\alpha(s,p) = q$라 두고 이 때 $\alpha_q(t) = \alpha(t,q)$ on J_q는 q에서의 maximal integral curve (with initial data $(0,q)$) 이다. 그런데 $\beta(t) := \alpha(t+s,p)$ defined on $J_p - s$라 두면 이는 위의 내용에 의해 initial data를 $(0,q)$로 가지는 integral curve가 된다. 따라서 β는 α에 포함되고 즉 $J_q \supset J_p - s$, $\alpha(t,q) = \alpha_q(t) = \beta(t) = \alpha(t+s,p)$ on $J_p - s$.
역으로 $\gamma(t) := \alpha(t-s,q)$ defined on $J_q + s$ 라 두면 이는 initial data를 $(0,p)$로 가지는 integral curve가 된다. 따라서 위와 마찬가지로 $J_q + s \subset J_p$ 를 만족하고 그러므로 $J_p - s = J_q$ 이다.

(1) and (2)
Let $A = \{t \in J_p \,|\, \exists U$ *a neighborhood of* (t,p) *such that* $U \subset \mathcal{D}$ *and* α *is* $\mathcal{C}^\infty$ *on* $U\}$.
먼저 local flow theorem으로부터 $0 \in A$임을 알 수 있으므로 $A \neq \emptyset$이다. 또한 A의 정의로부터 A가 open임은 당연하다. 이제 A가 closed임을 보이기만 하면 connectedness로부터 (1),(2)를 증명할 수 있다.

$\overline{A} \subset A$를 보이자. $s \in \overline{A}$ 이라 두면 $\alpha(s,p) \in M$ 에 대해 local flow가 존재한다. i.e., $\exists I = (-\delta, \delta)$ *and* V, a neighborhood of $\alpha(s,p)$, such that $I \times V \subset \mathcal{D}$ and $\alpha_1 = \alpha|_{I \times V}$ is $\mathcal{C}^\infty$.
이 때 $\alpha_p(t)$가 t에 대해 연속이므로 $\exists\, I_s$, a neighborhood of s, such that $\alpha_p(I_s) \subset V$ and $I_s \subset I + s$.
$s \in \overline{A}$이므로 $a \in I_s \cap A$를 잡을 수 있고, 이 a에 대해 A의 정의에 의해 $\exists (a-\epsilon, a+\epsilon) \times U_p = U$, a neighborhood of (a,p), such that $U \subset \mathcal{D}$ and $\alpha_2 = \alpha|_U$ is $\mathcal{C}^\infty$ 이다. 이 때 $\alpha(U) \subset V$라고 가정해도 무관하다.
이제 $I + a$를 생각해보자. 이것이 바로 $\mathcal{D}$에 들어가는 s의 근방이 된다. 먼저 $a \in I_s \subset I + s$ 이므로 $a - s \in I, s - a \in I$가 되고 따라서 $s \in I + a$이다. 이제 $W := (I + a) \times U_p \subset \mathcal{D}$ 임을 보이자.
Let $\alpha_3 := \alpha|_{(I+a) \times U_p}$. Then for $t \in I + a, q \in U_p$
$\alpha_3(t,q) = \alpha(u+a, q) = \alpha(u, \alpha(a,q)) = \alpha_1(u, \alpha_2(a,q)) : \mathcal{C}^\infty$.

$$\text{i.e.,}\quad \begin{array}{ccccccc} W & \to & I \times U & \xrightarrow{id \times \alpha_2} & I \times V & \xrightarrow{\alpha_1} & M \\ (u+a,q) & \mapsto & (u,(a,q)) & \mapsto & (u, \alpha_2(a,q)) & \mapsto & \alpha_1(u, \alpha_2(a,q)) \end{array}$$

따라서 $s \in A$임을 보였으므로 A는 closed이다. □

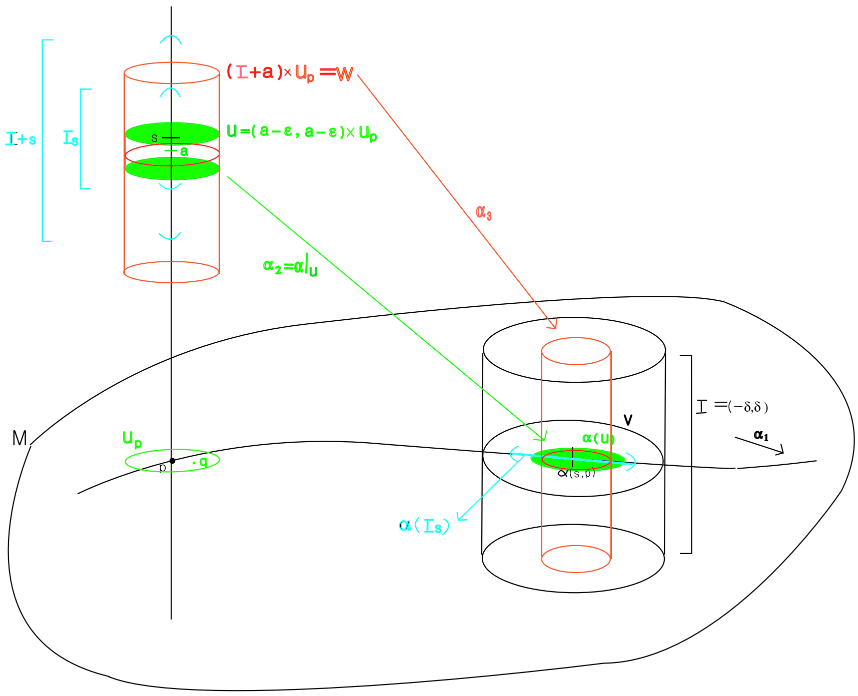

그림 22

따름정리 2 *Let* $\mathcal{D}_t = \{p \in M \mid (t,p) \in \mathcal{D}\}$ *and* $\alpha_t : \mathcal{D}_t \to M$ *be given by* $\alpha_t(p) = \alpha(t,p)$. *Then*
(1) $\mathcal{D}_t$ *is open* $\forall t$ *and* $\bigcup_{t>0} \mathcal{D}_t = M$.
(2) $\alpha_s \circ \alpha_t = \alpha_{s+t}$ *wherever defined.*
(3) $\alpha_t : \mathcal{D}_t \to \mathcal{D}_{-t}$ *is a diffeomorphism with inverse* α_{-t}.

증명 (1) Consider the slice map $i_t : \mathcal{D}_t \to \mathcal{D}$, $i_t(p) = (t,p)$, which is continuous.
$\Rightarrow i_t^{-1}(\mathcal{D}) = \mathcal{D}_t$ is open.

(2)
$$\begin{aligned}(\alpha_s \circ \alpha_t)(p) &= \alpha_s(\alpha_t(p)) = \alpha_s(\alpha(t,p)) = \alpha(s, \alpha(t,p)) = \alpha(s+t,p) \\ &= \alpha_{s+t}(p), \ \ \forall p \in M.\end{aligned}$$

(3) For $p \in \mathcal{D}_t,\ \alpha_t(p) \in \mathcal{D}_{-t}$임을 보이자.
$\alpha(-t, \alpha_t(p)) = \alpha(-t, \alpha(t,p)) = \alpha(0,p)$(recall that $J_{\alpha(t,p)} = J_p - t$)
이므로 잘 정의된다.
따라서 $(-t, \alpha_t(p)) \in \mathcal{D}$이다. 그리고
$\alpha_{-t} \circ \alpha_t(p) = \alpha_{-t}(\alpha_t(p)) = \alpha(-t, \alpha(t,p)) = \alpha(0,p) = p$ 이고
역시 마찬가지로 $\alpha_t \circ \alpha_{-t} = id$이다. □

Remark. $\{\alpha_t\}$ is called *the local 1-parameter family of lacal diffeomorphisms* given by a vector field X or simply *the flow* generated by X.

따름정리 3 *Let* $J(p) = (a(p), b(p))$ *be the maximal domain for integral curve at* p. *Then* $b(a, respectively) : M \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ *is lower(upper, resp.) semi-continuous. i.e.,* $b^{-1}(\lambda, \infty]$*(*$a^{-1}[-\infty, \lambda)$*, resp.) is open ,* $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

증명
$$\begin{aligned}b^{-1}(\lambda, \infty] &= \{p \in M \mid b(p) > \lambda\} = \{p \in M \mid (t,p) \in \mathcal{D} \text{ for some } t > \lambda\} \\ &= \bigcup_{t>\lambda} \{p \in M \mid (t,p) \in \mathcal{D}\} = \bigcup_{t>\lambda} \mathcal{D}_t.\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}a^{-1}[-\infty, \lambda) &= \{p \in M \mid a(p) < \lambda\} = \{p \in M \mid (t,p) \in \mathcal{D} \text{ for some } t < \lambda\} \\ &= \bigcup_{t<\lambda} \{p \in M \mid (t,p) \in \mathcal{D}\} = \bigcup_{t<\lambda} \mathcal{D}_t.\end{aligned}$$
□

Remark. 일반적으로 a, b는 continuous하지 않다.
예 : $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$에서 $X = \frac{\partial}{\partial u_1}$ 을 생각해보라.

정의 1 *A vector field* X *is* **complete** *if* $J_p = (-\infty, \infty)$ *for all* $p \in M$. *In this case* $\{\alpha_t\}$ *is a global 1-parameter family of (global) flows of M.*

명제 4 *If* $(-\epsilon,\epsilon)\times M \subset \mathcal{D}$ *for some* $\epsilon > 0$, *then* X *is complete.*

증명 Suppose $b(p) < \infty$, then take $t = b(p) - \frac{\epsilon}{2}$.
$\alpha(t,p)$에 대해 $J_{\alpha(t,p)} = J_p - t$ 이고 따라서 $b(\alpha(p,t)) = b(p) - t$ 이다.
$\therefore\ \frac{\epsilon}{2} + t = b(p) = b(\alpha(p,t)) + t > \epsilon + t$, contradiction. □

명제 5 $p \in M$, *If* $b(p) < \infty$, *then* "$\lim_{t\to b(p)} \alpha_p(t) = \infty$", *i.e.,*
$\forall K^{cpt} \subset M, \exists t_0$ *such that* $t_o < t < b(p) \Rightarrow \alpha_p(t) \notin K$.

숙제 9. 위 명제를 증명하라.

따름정리 6 *supp* $X = \overline{\{p \in M \mid X(p) \neq 0\}}$ *is compact* $\Rightarrow$ X *is complete.*
In particular, M *is compact* $\Rightarrow \forall X$ *on* M *is complete.*

증명 $\forall p \in K = supp\, X$, there is a local flow of p , i.e., $\exists(-\epsilon_p,\epsilon_p), U_p$ such that $(-\epsilon_p,\epsilon_p)\times U_p \subset \mathcal{D}$. K가 compact이므로 finite subcover $\{U_1,\cdots,U_k\}$가 존재한다. 따라서 그에 해당하는 $(-\epsilon_1,\epsilon_1),\cdots,(-\epsilon_k,\epsilon_k)$에 대해 $\epsilon = min\{\epsilon_1,\cdots,\epsilon_k\}$이라 두면 $(-\epsilon,\epsilon)\times M \subset \mathcal{D}$이다. 여기서 $p \notin supp\,X$ 일 경우에는 constant map이 integral curve가 되므로 당연히 $J_p = (-\infty,\infty)$이다. □

숙제 10. X is a vector field on M and $f \in \mathcal{C}^\infty(M,\mathbb{R})$ is a positive function. Let $\widetilde{X} = fX$, $\widetilde{J}_p = (\widetilde{a}(p),\widetilde{b}(p))$. Then
(1) The integral curve for $\widetilde{X}$ is a reparametrization of the integral curve for X.
(2) $\widetilde{a}(p) = \int_0^{a(p)} \frac{1}{f(\alpha(t,p))}dt$, $\widetilde{b}(p) = \int_0^{b(p)} \frac{1}{f(\alpha(t,p))}dt$, $\forall\, p \in M$.