Lie derivative and φ- related vector fields.

$\mathcal{C}^\infty$ vector field X와 X의 flow α 에 대해 다음을 정의하자.

$$(\mathcal{L}_X f)(p) := \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(f(\alpha_h(p)) - f(p))$$
$$= \text{Lie derivative of } f \text{ with respect to } X.$$

그런데 $\frac{d}{dt}|_0 f\circ\alpha = Xf$ 이고 위의 정의가 정확히 $\frac{d}{dt}|_0 f\circ\alpha$이므로 $(\mathcal{L}_X f)(p) = Xf(p)$ 이다.
flow α_h(diffeomorphism) 에 대해 α_h^*를 다음과 같이 정의하자.

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\alpha_h} & M & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ p & \mapsto & \alpha_h(p) & \mapsto & f\circ\alpha_h(p) = \alpha_h^* f(p) \end{array}$$

이를 α_h에 의한 f의 pull back이라고 하고 함수 f 외에 tensor field에도 적용가능하다. 이를 이용해 일반적으로 Lie derivative $\mathcal{L}_X\square = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}((\alpha_h^*\square)_p - \square_p)$를 $\square$의 flow of X를 따른 미분으로 정의한다. ($\square = f$,forms,vector fields,tensor fields)

정의 1 $(\mathcal{L}_X Y)(p) := \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(Y_p - (\alpha_{h*}Y)_p) = \lim_{k\to 0}\frac{1}{k}((\alpha_k^* Y)_p - Y_p)$.
여기서 $\alpha_h^* Y := (\alpha_h^{-1})_* Y$ 이다.

예. In $\mathbb{R}^2$, $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$, $Y = (b_1, b_2) = b_1\frac{\partial}{\partial x_1} + b_2\frac{\partial}{\partial x_2}$.
그러면 X의 flow는 x_1축 방향을 따른 평행이동이므로 $\mathcal{L}_X Y$는 Y의 x_1축 방향의 보통 미분 $(\frac{\partial b_1}{\partial x_1}, \frac{\partial b_2}{\partial x_1}) = \frac{\partial b_1}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}$이 된다.

정리 1 *X, Y are $\mathcal{C}^\infty$ vector fields on $M \Rightarrow \mathcal{L}_X Y = [X, Y]$*

증명 local 성질이므로 $p\in M$ 근방에서만 보이면 충분하다. 따라서 X를 $\mathbb{R}^n$상에 있다고 보고 앞절의 정리1에 의해 $X = \frac{\partial}{\partial x_1}$ 이라고 가정해도 무관하다.
Let $Y = \sum b_i\frac{\partial}{\partial x_i}$. Then clearly $\mathcal{L}_X Y = \sum\frac{\partial b_i}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_i}$ and

$$\begin{aligned} [X,Y] &= [\tfrac{\partial}{\partial x_1}, \textstyle\sum b_i\frac{\partial}{\partial x_i}] \\ &= \textstyle\sum[\frac{\partial}{\partial x_1}, b_i\frac{\partial}{\partial x_i}] \\ &= \textstyle\sum(\frac{\partial b_i}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_i} + b_i\frac{\partial}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_i} - b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_1}) \\ &= \textstyle\sum\frac{\partial b_i}{\partial x_1}\frac{\partial}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

따라서 $\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$ 이다. $\square$

따름정리 2 *(1)* $\mathcal{L}_X Y = -\mathcal{L}_Y X$.
(2) $\mathcal{L}_X Y$ *is linear with respect to* X *and* Y.
(3) $\mathcal{L}_X(fY) = (\mathcal{L}_X f)Y - f(\mathcal{L}_X Y)$.
(4) $\mathcal{L}_X[Y,Z] = [\mathcal{L}_X Y, Z] + [Y, \mathcal{L}_X Z]$.
(5) $\mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y] := \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X$.

증명. Easy exercise.

축제 11. $p \in M$, X, a vector field with flow α 에 대해 다음을 보이라.
(1) $F(t) := f(\alpha_p(t))$ then $\frac{d^k F}{dt^k}(t) = (X^k f)(t)$ and show

$$f(\alpha_p(t)) = f(p) + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{j!}(X^j f)(p)t^j + G(t) \quad \text{, where } \frac{G(t)}{t^k} \to 0 \text{ as } t \to 0.$$

(2) Let Y be an another vector field with flow β and let
$\sigma(t) = \overline{\beta}(t, c(t))$, $c(t) = \overline{\alpha}(t, b(t))$
$b(t) = \beta(t, a(t))$, $a(t) = \alpha(t, p)$.
여기서 $\overline{\alpha}$는 $-X$의 flow이다.

Show $\frac{d^2}{dt^2}|_0 f(\sigma(t)) = 2[X,Y]_p f$ or $\gamma(t) := \sigma(\sqrt{t}) \Rightarrow \frac{d\gamma}{dt}(0) = [X,Y]_p f$.

$(Hint)$ $f(\sigma(t)) = f(c(t)) - (Yf)(c(t))t + \frac{1}{2}(Y^2 f)(c(t))t^2 + G(t)$,
$g(c(t)) = g(b(t)) - (Xg)(b(t))t + \frac{1}{2}(X^2 g)(b(t))t^2 + G_1(t) \cdots$ 등을 이용해 축차적으로 대입해보라.

정의 2 Let $\varphi : M \to N, \mathcal{C}^\infty$, X be a $\mathcal{C}^\infty$ vector field on M and Y be a $\mathcal{C}^\infty$ vector field on N. X and Y are φ**−related** ($X \underset{\varphi}{\sim} Y$) if $\varphi_* X_p = Y_{\varphi(p)}$ $\forall p \in M$.

명제 3 *Let* $\varphi : M \to N, \mathcal{C}^\infty$ *and* X *be a* $\mathcal{C}^\infty$ *vector field on* M.
(1) X *and* $\widetilde{X}$ *are* φ*-related* $\Rightarrow \varphi(\alpha(t,p)) = \widetilde{\alpha}(t, \varphi(p))$ *where* $\alpha(\widetilde{\alpha}$*,resp.) is the flow of* $X(\widetilde{X}$*,resp.).*
(2) $X \underset{\varphi}{\sim} \widetilde{X}$, $Y \underset{\varphi}{\sim} \widetilde{Y} \Rightarrow [X,Y] \underset{\varphi}{\sim} [\widetilde{X}, \widetilde{Y}]$.

증명
(1) $X \underset{\varphi}{\sim} \widetilde{X} \Rightarrow \varphi_*(X_p) = \widetilde{X}_{\varphi(p)}$ 이고 p를 지나는 integral curve $\alpha_p(t)$ 에 대해 $\varphi(\alpha_p(t))$는 $\varphi(p)$를 지나는 $\widetilde{X}$의 integral curve가 된다. 왜냐하면
$\frac{d}{dt}(\varphi \circ \alpha_p(t)) = \widetilde{X}(\varphi(\alpha_p(t)))$임을 보이면 되는데

$$
\begin{aligned}
\tfrac{d}{dt}(\varphi\circ\alpha_p) &= \varphi_* \tfrac{d\alpha}{dt} \\
&= \widetilde{X}_{\varphi(p)} \qquad\qquad \text{since } \tfrac{d\alpha}{dt} = X_p
\end{aligned}
$$

따라서 uniqueness에 의해 $\varphi(\alpha_p(t)) = \widetilde{\alpha}(t, \varphi(p))$이다.

i.e.,

$$
\begin{array}{ccc}
\mathbb{R}\times M \supset \mathcal{D} & \xrightarrow{id\times\varphi} & \widetilde{\mathcal{D}} \subset \mathbb{R}\times\widetilde{M} \\
\alpha\downarrow & & \downarrow\widetilde{\alpha} \\
M & \xrightarrow[\varphi]{} & \widetilde{M}
\end{array}
$$

(2) $\varphi_*([X,Y]_p) = [\widetilde{X},\widetilde{Y}]_{\varphi(p)}$ 를 보이자. 먼저 $\forall f \in \mathcal{C}^\infty$에 대해

$$
\begin{aligned}
\varphi_*([X,Y]_p)(f) &= [X,Y]_p(f\circ\varphi) \\
&= X_pY(f\circ\varphi) - Y_p(X(f\circ\varphi)) \\
&= X_p(\varphi_*Y)(f) - Y_p(\varphi_*X)(f) \\
&= X_p((\widetilde{Y}f)\circ\varphi) - Y_p((\widetilde{X}f)\circ\varphi) \\
&= \varphi_*(X_p)(\widetilde{Y}f) - \varphi_*(Y_p)(\widetilde{X}f)) \\
&= \widetilde{X}_{\varphi(p)}(\widetilde{Y}f) - \widetilde{Y}_{\varphi(p)}(\widetilde{X}f) \\
&= [\widetilde{X},\widetilde{Y}]_{\varphi(p)}f
\end{aligned}
$$

□

따름정리 4
(1) Let $\varphi : M \to N$ be a diffeomorphism and X be a vector field on M with flow $\{\alpha_t\}$. Then $\{\varphi\circ\alpha_t\circ\varphi^{-1}\}$ is a flow of φ_*X.
(2) Let $\varphi : M \to M$ be a diffeomorphism, then $\varphi_*X = X \Leftrightarrow \varphi\circ\alpha_t = \alpha_t\circ\varphi$, $\forall t$.

증명 (1) 앞 명제에서 $\varphi(p)$에서의 flow $\widetilde{\alpha}$ 는 $\varphi(\alpha(t,p))$ 와 같으므로
$\widetilde{\alpha}_t\circ\varphi = \varphi\circ\alpha_t$ 이다.

(2) ($\Rightarrow$) $X \underset{\varphi}{\sim} X$ 이고 flow가 둘 다 α_t로 같으므로 (1)에 의해 자명하다
($\Leftarrow$) $\varphi\circ\alpha_t\circ\varphi^{-1}$는 φ_*X의 flow이고 α_t 는 X의 flow인데 두 vector field의 flow가 서로 같으므로 $\varphi_*X = X$ 이다. □

보조정리 5 *X generates $\{\alpha_t\}$ and Y generates $\{\beta_t\}$. Then*
$[X,Y] = 0 \Leftrightarrow \alpha_t\circ\beta_s = \beta_s\circ\alpha_t \ \ \forall s,t.$

증명 ($\Leftarrow$) $\alpha_t\circ\beta_s\circ\alpha_t^{-1} = \beta_s$이고 앞의 따름정리 (2)에 의해 $(\alpha_t)_*Y = Y$ 이다. (α_t를 diffeomorphism으로 Y를 vector field로 보면 된다.) 그러면
$[X,Y] = \mathcal{L}_XY = \lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}(Y - (\alpha_{t*}Y)) = 0.$

($\Rightarrow$) For $\forall q \in M$, $\lim_{h\to 0}\dfrac{1}{h}(Y_q - (\alpha_{h*}Y)_q) = 0$. Let $c(t) = (\alpha_{t*}Y)_p$, then

$$\begin{aligned} c'(t) &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}(c(t+h)-c(t)) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}((\alpha_{(t+h)*}Y)_p - (\alpha_{t*}Y)_p) \\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}((\alpha_t\circ\alpha_h)_*Y)_p - (\alpha_{t*}Y)_p) = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}((\alpha_{t_*}\circ\alpha_{h_*})Y)_p - (\alpha_{t*}Y)_p) \\ &= \alpha_{t*}\{\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}((\alpha_{h*}Y)_{\alpha_{-t}(p)} - Y_{\alpha_{-t}(p)})\} = 0 \end{aligned}$$

$\therefore c(t) = c(0)$ *and* $\alpha_{t*}Y = Y$ 이므로 따름정리의 (2)번에 따라 $\alpha_t\circ\beta_s = \beta_s\circ\alpha_t$ 이다.

□

Recall. $\mathbb{R}^n$ 에서 $[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}] = 0$ 이다.

다음 정리로부터 역에 대한 성질도 얻을 수 있다.

정리 6 *Let* $X_1, X_2, \cdots, X_k$ *be linearly independent* $\mathcal{C}^\infty$ *vector fields in a neighborhood of* $p\in M$. *If* $[X_i, X_j] = 0$, $\forall i,j = 1,2,\cdot\cdot,k$. *Then* $\exists$ *a coordinate chart* (U,x) *around* p *such that* $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $i = 1,2,\cdots,k$.

증명 local problem 이므로 $\mathbb{R}^n$ 상에서 봐도 된다. $p=0$으로 두고 linear change of coordinate에 의해 0에서는 $X_i(0) = \frac{\partial}{\partial u_i}(0), i = 1,\cdot\cdot,k$ 이 되게 할 수 있다.
각 X_i의 flow를 $\{\alpha_t^i\}$ 라 두자. 그리고 함수 $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$를 다음과 같이 준다.
$\varphi(x_1,x_2,\cdots,x_n) = \alpha^1_{x_1}(\alpha^2_{x_2}(\cdot\cdot(\alpha^k_{x_k}(0,\cdot\cdot,0,x_{k+1},\cdot\cdot x_n))\cdot\cdot)) = \alpha^1_{x_1}(\overline{x})$, 여기서 $\overline{x} = \alpha^2_{x_2}(\cdot\cdot(\alpha^k_{x_k}(0,\cdot\cdot,0,x_{k+1},\cdot\cdot x_n))\cdot\cdot)$. 그러면
$\varphi_*\frac{\partial}{\partial u_1}(x_1,\cdots,x_n) = \frac{d}{dt}|_{t=x_1}\alpha^1_t(\overline{x}) = X_1(\alpha^1(x_1,\overline{x})) = X_1(\varphi(x))$.
$[X_1,X_2]=0$ 이므로 위의 보조정리에 의해 $\varphi(x) = \alpha^1_{x_1}(\alpha^2_{x_2}\cdot\cdot) = \alpha^2_{x_2}(\alpha^1_{x_1}\cdot\cdot)$ 이다. 따라서 같은 방법으로 $\varphi_*\frac{\partial}{\partial u_2}(x) = X_2(\varphi(x))$ 이다.
더 일반적으로 $\varphi_*\frac{\partial}{\partial u_i}(x) = X_i(\varphi(x))$, $\forall i = 1,2,\cdot\cdot,k$도 성립한다. 따라서 $\varphi_*\frac{\partial}{\partial u_i}(0) = X_i(0) = \frac{\partial}{\partial u_i}(0), i=1,\cdot\cdot,k$.
그리고 $i = k+1,\cdot\cdot,n$에 대해서는 $\varphi|_{0\times\mathbb{R}^{n-k}} = id$가 되므로
$\varphi_*\frac{\partial}{\partial u_j}(0) = \frac{\partial}{\partial u_j}(0)$, $j = k+1,\cdot\cdot,n$.
따라서 $\varphi_*(0) = id$이 되어 φ^{-1} 는 p근방에서의 coordinate chart를 주고 그 근방에서 $\frac{\partial}{\partial x_i} = X_i$, $i = 1,2,\cdot\cdot,k$ 이다.

□