Distribution and Frobenius theorem(Local part)

정의 1 A $k-$dimensional **distribution** $\mathcal{D}$ on M^n is a choice of a $k-$dimensional subspace $\mathcal{D}(p) \subset T_pM$ for each $p \in M$. $\mathcal{D}$ is $\mathcal{C}^\infty$ if $\forall p \in M,\ \exists U$ a neighborhood of p and $X_1, \cdots, X_k$, $\mathcal{C}^\infty$ vector fields on U such that $\mathcal{D}(p) = span\{X_1(p), \cdots, X_k(p)\}$.
For a vector field X, $X \in \mathcal{D}$ if $X(p) \in \mathcal{D}(p)$, $\forall p \in M$.
We consider only $\mathcal{C}^\infty$ distributions. $\mathcal{D}$ is **involutive**(or completely integrable) if $[X, Y] \in \mathcal{D}$ for $\forall \mathcal{C}^\infty$ vector fields $X, Y \in \mathcal{D}$.

정의 2 A submanifold (N, φ) of M is an **integral manifold** of $\mathcal{D}$ on M if $\varphi_*(T_pN) = \mathcal{D}(\varphi(p))\ \ \forall p \in N$.

숙제 12-1. $X_1, \cdots, X_k : \mathcal{C}^\infty$ vector fields spanning $\mathcal{D}$. Then
$\mathcal{D}$ is involutive if and only if $[X_i, X_j] \in \mathcal{D}$, $\forall i, j$.

명제 1 *Let $\mathcal{D}$ be a distribution on M.*
$\forall p \in M, \exists$ an integral manifold of $\mathcal{D}$ through $p \Rightarrow \mathcal{D}$ is involutive.

증명 $X, Y \in \mathcal{D}$ 에 대해 $[X, Y] \in \mathcal{D}$를 보이기 위해 각 $p \in M$에 대해 (N, φ)를 p를 지나는 $\mathcal{D}$의 integral manifold라 두자. integral manifold의 정의에 의해 $\varphi_*(\overline{X}) = X$,$\varphi_*(\overline{Y}) = Y$ 를 만족하는 vector fields $\overline{X}, \overline{Y}$ 가 N상에 존재한다. 이 때 $\overline{X}, \overline{Y}$는 N위의 $\mathcal{C}^\infty$ vector field가 된다.(왜 그런지 보여라.)
$[X, Y]_{\varphi(p)} = [\varphi_*\overline{X}, \varphi_*\overline{Y}]_{\varphi(p)} = \varphi_*[\overline{X}, \overline{Y}]_p \in \varphi_*(T_pN) \in \mathcal{D}$.
따라서 $X, Y \in \mathcal{D} \Rightarrow [X, Y] \in \mathcal{D}$임을 보였다. □

정리 2 *(Frobenius theorem : Local part)*
Let $\mathcal{D}$ be a $k-$dimensional $\mathcal{C}^\infty$ distribution on M^n.
$\mathcal{D}$ is involutive $\Rightarrow \forall\, p \in M, \exists$ an integral manifold of $\mathcal{D}$ through p.
In fact , $\exists$a coordinate chart (U, x) with $x(p) = 0$ and $x(U) = (-\epsilon, \epsilon)^n$ such that $\forall (a_{k+1}, \cdot\cdot, a_n) \in \mathbb{R}^{n-k}$ with $|a_i| < \epsilon$, the slice
$\{q \in U, \mid x_{k+1}(q) = a_{k+1}, \cdot\cdot, x_n(q) = a_n\}$ is an integral manifold of $\mathcal{D}$.
And if (N, φ) is a connected integral manifold of $\mathcal{D}$ such that $\varphi(N) \subset U$, then $\varphi(N)$ lies in one of these slices.

그림 23

증명 local problem이므로 $p = 0 \in \mathbb{R}^n$ 으로 두고 $\mathcal{D}(0) = span\{\frac{\partial}{\partial u_1}(0), \cdot\cdot, \frac{\partial}{\partial u_k}(0)\}$ 이라 두자. (linear coordinates change에 의해 이렇게 두어도 상관없다.) canonical projection $\pi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$를 생각하면

$\pi_* : \mathcal{D}(0) \to T_0\mathbb{R}^k$는 사실상 identity이므로 isomorphism이 된다.
(0에서 $\mathcal{D}(0) = span\{\frac{\partial}{\partial u_1}(0), \cdot\cdot, \frac{\partial}{\partial u_k}(0)\}$ 이고 이는 $T_0\mathbb{R}^k$와 같다.)
그러면 continuity성질때문에 0근방의 p에 대해서도 $\pi_* : \mathcal{D}(p) \to T_{\pi(0)}\mathbb{R}^k$는 isomorphism이 된다. 따라서
$\exists! X_1(q), \cdot\cdot, X_k(q) \in \mathcal{D}(q)$ such that $\pi_* X_i(q) = \frac{\partial}{\partial u_i}(\pi(q))$, $i = 1, \cdot\cdot, k$.
Note that each X_i is $\mathcal{C}^\infty$(**숙제 12-2.**) and $\pi-$related to $\frac{\partial}{\partial u_i}$.
$\therefore \pi_*[X_i, X_j]_q = [\pi_* X_i, \pi_* X_j]_{\pi(q)} = [\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}]_{\pi(q)} = 0$
$\mathbb{R}^n$에서는 $\frac{\partial}{\partial u_i}, \frac{\partial}{\partial u_j}$가 서로 commute하므로 위식은 0이 된다. 그런데 involutive하다는 조건에서 $[X_i, X_j]_q \in \mathcal{D}(q)$이고, π_*는 $\mathcal{D}(q)$에 isomorphism을 주므로 $[X_i, X_j]_q = 0$ 이어야 한다. 따라서 앞절의 정리6에 따라 $\exists$ coordinate chart (U, x) such that $X_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$ on U 이고 따라서 각 slice는 $\mathcal{D}$의 integral manifold가 된다.

(N, φ)가 connected integral manifold with $\varphi(N) \subset U$ 인 경우

$$N \xrightarrow{\varphi} U \xrightarrow{x} x(U) \xrightarrow{p_2} \mathbb{R}^{n-k}$$

에서 N이 integral manifold라는 사실 때문에 $(p_2 \circ x \circ \varphi)_* = 0$ 이 되고 따라서 $(p_2 \circ x \circ \varphi) = locally\ constant$ 이다. 그런데 N이 connected 이므로 $(p_2 \circ x \circ \varphi) = constant$ 이다. 따라서 $\varphi(N)$는 single slice에 포함되어야 한다.
□

<Frobenius theorem as P.D.E. problem>

예. $M = \mathbb{R}^3$, $\mathcal{D}(p) = span\{X = \frac{\partial}{\partial x} + f(p)\frac{\partial}{\partial z}, Y = \frac{\partial}{\partial y} + g(p)\frac{\partial}{\partial z}\}$.
$\mathcal{D}$가 involutive한지를 보기 위해서는 X, Y에 대해서만 $[X, Y] \in \mathcal{D}$ 인지를 체크하면 된다. 실제 계산을 해보면 $[X, Y] = (\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial g}{\partial z} - g\frac{\partial f}{\partial z})\frac{\partial}{\partial z}$ 이고 이 식이 $\mathcal{D}$안에 있으려면

$$\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} + f\frac{\partial g}{\partial z} - g\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \qquad (*)$$

이 되어야 한다. 즉 $\mathcal{D}$가 involutive임을 확인하는 것은 $(*)$를 보이는 것과 같다. 만일 $\mathcal{D}$가 $(*)$를 만족한다면 Frobenius 정리에 의해, 혹은 직접적으로 다음과 같이 integral manifold가 존재함을 보일 수 있다.

Show integrability directly using $(*)$:
We want $\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ such that

$$(*)' \begin{cases} \frac{\partial \alpha}{\partial x} = & f(x, y, \alpha(x, y)) \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} = & g(x, y, \alpha(x, y)) \end{cases}$$

만일 $(*)'$를 만족하는 α가 존재한다면 $\frac{\partial^2 \alpha}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \alpha}{\partial y \partial x}$ 성질에서 $(*)$를 만족함을 알 수 있다. 역으로 α의 존재성은 $(*)$만 있으면 충분하다는 것을 보이자.
(이는 Frobenius 정리를 증명하는 다른 방법이기도 하다.)

(1st step) $y = b$로 고정시키고 $\frac{\partial \alpha}{\partial x} = f(x, b, \alpha(x, b))$ 를 풀면 이는 O.D.E 이므로 해가 유일하게 존재한다.

(2nd step) 각 고정된 x에 대해 다음 식을 생각하자.
$\frac{\partial \alpha}{\partial y} = g(x, y, \alpha(x, y))$ with $\alpha(x, b) =$given by 1st step.
이것 역시 O.D.E이므로 유일한 해를 찾을 수 있고, local flow theorem에 의해($\mathcal{C}^\infty$ dependence on initial data) $\alpha(x, y)$는 x, y에 대해 모두 $\mathcal{C}^\infty$ 이다.

(3rd step) 위에서 찾은 α가 실제로 $(*)'$를 만족하는지를 확인하자. $(*)'$의 아랫식에서 α를 얻었으므로 이제 윗식을 만족하는지를 살펴보면 된다.
Let $h(y) = \frac{\partial \alpha}{\partial x} - f(x, y, \alpha(x, y))$. Then $h(b) = 0$ and

$$\begin{aligned} h'(y) &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial \alpha}{\partial y}\right) \qquad where\ \ z = \alpha(x, y). \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}\frac{\partial \alpha}{\partial x} - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} g\right) \\ &= \frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial z}(h + f) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} g\right) \\ &= \frac{\partial g}{\partial z} h \qquad by\ \ (*) \end{aligned}$$

$\therefore h'(y) = \frac{\partial g}{\partial z} h$; O.D.E
그런데 $h(y) \equiv 0$가 위 미분방정식의 해가 되므로, uniqueness에 의해 $h(y) \equiv 0$이다. 따라서 2nd step에서 찾은 α는 바로 우리가 찾던 해가 된다.

더 일반적으로 다음과 같은 $\mathcal{C}^\infty$ distribution을 생각해보자.

$$\mathcal{D}(p) = < \frac{\partial}{\partial u_1} + \sum_{i=1}^{l} f_1^i \frac{\partial}{\partial u_{k+i}}, \cdots, \frac{\partial}{\partial u_k} + \sum_{i=1}^{l} f_k^i \frac{\partial}{\partial u_{k+i}} > \equiv < X_1, \cdots, X_k >$$

integrability condition : $[X_i, X_j] = [\frac{\partial}{\partial u_i} + \sum_p^l f_i^p \frac{\partial}{\partial u_{k+p}}\ \ ,\ \ \frac{\partial}{\partial u_j} + \sum_q^l f_j^q \frac{\partial}{\partial u_{k+q}}] \in \mathcal{D}$

$\Rightarrow \sum_p (*) \frac{\partial}{\partial u_{k+p}} \in \mathcal{D} \therefore (*) = 0$, $\forall i, j$.
$(*)$를 vector notation $f_j = (f_j^1, \cdots, f_j^l)$을 이용해 다시 쓰면 다음과 같이 표현할 수 있다.
$\frac{\partial f_j}{\partial u_i} - \frac{\partial f_i}{\partial u_j} + \sum_q f_i^q \frac{\partial f_j}{\partial x_q} - \sum_q f_j^q \frac{\partial f_i}{\partial x_q} = 0$, $x_q = u_{k+q}$ $(q = 1, \cdots, l)$.

정리 3 *Let* $U \times V \subset \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^l = \{(u,x)\}$, *with open* U *and* V, $k + l = n$ *and* $f_i : U \times V \to \mathbb{R}^l$, $\mathcal{C}^\infty$ *functions,* $i = 1, \cdot\cdot, k$. *Then for each* $(a,b) \in U \times V$, $\exists W \subset U$, *a neighborhood of* a *and* $\exists! \alpha : W \to V$ *such that*

$$\begin{cases} \alpha(a) = & b \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u_i}(u) = & f_i(u, \alpha(u)) \ , \ u \in W. \end{cases}$$

if and only if $(*)$ *holds on* $U \times V$.

(증명) 앞에서 이미 보인 $(k,l) = (2,1)$의 경우와 같다.
Reference : Spivak p.254