Frobenius theorem(Global part)

정리 1 *Let $\mathcal{D}$ be a k-dimensional $\mathcal{C}^\infty$-involutive distribution on M.*
For $\forall p \in M, \exists!$ maximal connected integral manifold C of $\mathcal{D}$ through p.
Furthermore, if M is 2nd countable, so is C.

증명 Local part로부터 각 $p \in M$에 대해 $\exists(U, x)$ coordinate chart such that $x(U) = (-\epsilon, \epsilon)^n$ and each slice
$S_a^U = \{q \in U \mid (x_{k+1}(q), \cdots, x_n(q)) = a = (a_{k+1}, \cdots, a_n)\}, |a_{k+j}| < \epsilon$
is a integral manifold.

(1) $\{S_\alpha^U\}$ defines a coherent topology(or foliation topology) $\mathcal{F}$ on M.
(Each S_α^U has a topology of $x(S_\alpha^U)$):

Check : Topology of $S_a^U \cap S_b^V$ induced from S_a^U is the same as that from S_b^V and open in S_a^U(and in S_b^V).

그림24

먼저 $S_a^U \cap S_b^V$의 topology는 $x(S_a^U)$의 topology를 가져온 것이고 $y(S_b^V)$쪽도 마찬가지이다. 그런데 M위의 chart x, y로서 transition map $h = y \circ x^{-1}$은 정의역과 치역사이의 diffeomorphism이므로 homeomorphism이다. 따라서 이를 $x(S_a^U \cap S_b^V)$에 restrict시킨 것 역시 homeomorphism이므로 이들간의 topology는 일치한다.
$S_a^U \cap S_b^V$가 S_a^U ,S_b^V 에서 open이라는 사실은?(Exercise)

(2) 위에서 얻은 $(M, \mathcal{F})$는 M의 k-dimensional submanifold가 되고 $\mathcal{D}$의 integral manifold가 된다 : (1)에서와 마찬가지로 $h|_{S_a^U \cap S_b^V}$는 $\mathcal{C}^\infty$이므로 $(S_a^U, x|_{S_a^U})$는 submanifold가 되게 하는 chart가 되고, $(M, \mathcal{F})$는 당연히 $\mathcal{D}$의 integral manifold가 된다.

(3) C :=a connected component of $(M, \mathcal{F})$ containing p.
$\mathcal{F}$는 locally connected 이므로 component C는 open(in $\mathcal{F}$)이고, (또한 component의 정의에 의해 closed이다.) 따라서 C는 $\mathcal{D}$의 integral manifold가 된다.

(4) Show C is maximal and unique :
(N, φ)를 p를 지나는 또다른 $\mathcal{D}$의 connected integral manifold라고 하자. 이 때 $\varphi : N \to (M, \mathcal{F})$가 연속임을 보이자.(주의! $(M, \mathcal{F}) \neq M$)
submanifold 조건에서 $\varphi : N \to M$는 $\mathcal{C}^\infty$이므로 continuous이다. 또한 모든

cubic neighborhood $U_{\varphi(a)}, a \in N$ 에 대해 $\exists W$,a connected neighborhood of a such that $\varphi(W) \subset U := U_{\varphi(a)}$. 그런데 W가 connected integral manifold이므로 $\varphi(W)$은 single slice에 포함된다. 즉 $\varphi : W \to U$가 연속이고 slice가 U의 subspace이므로 $\varphi : W \to slice$ 는 연속이다. 따라서 $\varphi : N \to (M, \mathcal{F})$가 continuous임을 보였다. (slice의 topology 는 $(M, \mathcal{F})$의 subspace topology와 같으므로.)
또한 N이 connected이므로 $\varphi(N)$은 maximal connected C in $(M, \mathcal{F})$ 에 포함된다. 따라서 $\varphi : N \to C$ 은 연속이고 submanifold 절에서 증명한 다음 명제에 의해 $\mathcal{C}^\infty$까지 된다.

(C, i) is a submanifold of M, $\psi = i \circ \varphi : \mathcal{C}^\infty$ *and* $\varphi(N) \subset C$. Then

$$\begin{array}{ccc} N & \xrightarrow{\psi} & M \\ \varphi \searrow & & \uparrow i \\ & C & \end{array} \qquad \varphi \text{ is continuous} \Rightarrow \varphi \text{ is } \mathcal{C}^\infty.$$

그리고 (N, φ)는 integral manifold 즉 M의 submanifold가 되므로 1-1이 되고 nonsingular(즉 $\varphi_* : 1-1$)하다. 따라서 φ는 local diffeomorphism이 되고 $\varphi(N) \subset C$이므로 (N, φ)는 C의 open embedded submanifold가 된다. 따라서 C는 maximal, unique 하다. (만일 N이 maximal하다면 φ는 global diffeomorphism이 된다.)

(5) M is 2nd countable$\Rightarrow$ C is also 2nd countable:
먼저 M이 2nd countable이므로 $\exists$ countable cubic chart which give slice solutions of $\mathcal{D}$이다. 이들을 $\{U_0, U_1 \cdots\}$ 이라 두자. C가 path connected이므로 고정된 $p \in U_0 \cap C$와 임의의 한 점 $q \in C$에 대해 p와 q를 잇는 path가 존재한다. 이 때 path 위의 각점들에 대한 cubic들이 만드는 covering에 대해 finite subcover가 존재하므로 $\exists$ a sequence $U_0 = U_{i_1}, \cdots, U_{i_p} = U_i$, $q \in U_i$ for some U_i such that $(C \cap U_{i_r}) \cap (C \cap U_{i_{r+1}}) \neq \emptyset$ and $p \in U_o \cap C$ and $q \in U_i \cap C$. 따라서 다음만 보이면 충분하다.

1. $\exists$ only countably many possible choices of each sequence,
$U_0 = U_{i_1}, \cdots, U_{i_p} = U_i$: 원래 U_j가 countable개이고 이중에서 finite개를 뽑는 것이므로 당연하다.

2. A single slice S of U_j can intersect only countable many slices of U_k :
$S \cap U_k$는 S에서 open이고 S는 2nd countable이므로 $S \cap U_k$ 역시 2nd countable이다. 이 때 $S \cap U_k$의 component를 생각하면 이는 locally connected인 S의 open set이므로 open이 되고 따라서 $S \cap U_k$는 많아야 countable 개의 component를 가진다. 이들 countable개의 component들은 S에서 open이므로

connected integral manifold이다. 따라서 U_k의 single slice안에 포함되어야 한다. 즉 U_j의 single slice S가 만날 수 있는 U_k의 slice는 많아야 countable개이다.

$\square$