5. Tensors as multi-linear functions.

<Non-singular pairing.>
A pairing of V and W is a bilinear map $(\ ,\ ) : V \times W \to \mathbb{R}(or\ \mathbb{C})$.
$(\ ,\ )$ is nonsingular if $(1)(v, \forall w) = 0 \Rightarrow v = 0$
$(2)(\forall v, w) = 0 \Rightarrow w = 0$
$(1) \Leftrightarrow V \to W^*$ is 1-1.
$v \mapsto (v,\ )$
$(2) \Leftrightarrow W \to V^*$ is 1-1.
$w \mapsto (\ ,w)$
위에서 $dim\, V \leq dim\, W^*$,$dim\, W \leq dim\, V^*$를 얻을 수 있고 $dim\, V = dim\, V^*$이므로 따라서 $(\ ,\ )$이 nonsingular하다면 V, W는 같은 차원임을 알 수 있다. 차원이 같고 1-1이므로 위 함수들은 isomorphism $V \cong W^*, W \cong V^*$ 을 준다.
보다 일반적으로
$(\ ,\ ) : V \times W \to \mathbb{R}$, a pairing with
$(1)(n,\ ) = 0\ , \forall n \in N < V$
$(2)(\ ,m) = 0\ , \forall m \in M < W$.
Then $(\ ,\ )$ induces a pairing $(\ ,\ ) : V/N \times W/M \to \mathbb{R}$ given by $([v],[w])$:=(v,w).

이제 위의 내용을 tensor에 적용하자. $M(V^*) = span\{V^* \times \cdot\cdot \times V^*\}$,
$M(V) = span\{V \times \cdot\cdot \times V\}$ 에 대해 다음 pairing을 생각한다.

$$\begin{array}{lcll} (*)\ M(V^*) & \times & M(V) & \longrightarrow \quad \mathbb{R} \\ ((\alpha_1, \cdot\cdot, \alpha_r), (v_1, \cdot\cdot, v_r)) & & & \mapsto \quad \alpha_1(v_1)\cdot\cdot\alpha_r(v_r) \end{array}$$

앞에서 $V \times \cdot\cdot \times V$에서 $T^r(V)$를 얻을 때 썼던 N에 대해 $N(V^*), N(V)$는
$((\alpha_1 + \alpha_1', \cdot\cdot) - (\alpha_1, \cdot\cdot) - (\alpha_1', \cdot\cdot), \forall(v_1, \cdots, v_r)) \mapsto 0$,
$(\forall(\alpha_1, \cdots, \alpha_r), (v_1 + v_1', \cdot\cdot) - (v_1, \cdot\cdot) - (v_1', \cdot\cdot)) \mapsto 0$ 등을 만족하고 따라서
$(\ ,\ ) : T^r(V^*) \times T^r(V) \to \mathbb{R}$ 이 induce된다. 즉

$$\begin{array}{ccc} M(V^*) \times M(V) & \to & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & \nearrow \exists(\ ,\ ) & \\ T^r(V^*) \times T^r(V) & & \end{array}$$

이제 이 pairing이 nonsingular 하다는 것만 보이면 $T^r(V^*) \cong (T^r(V))^*$임을 알 수 있다. V의 basis $e = (e_1, \cdots, e_n)$에 대해 V^*에서 dual basis $\epsilon = (\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n)$을 잡았을 때 , $(\sum_I a_I \epsilon_I, \forall v) = 0$, $a_I \epsilon_I = a_{i_1 \cdot\cdot i_r} \epsilon_{i_1} \otimes \cdots \otimes \epsilon_{i_r}$이라면 $v = e_J = e_{j_1} \otimes \cdot\cdot \otimes e_{j_r}$에 대해 $0 = (\sum_I a_I \epsilon_I, e_J) = \sum_I a_I \epsilon_{i_1}(e_{j_1}) \cdots \epsilon_{i_r}(e_{j_r}) = a_J$
이 되어 모든 $a_J = 0$이 되고 다른쪽 역시 마찬가지이므로 이 pairing이 nonsingular함을 알 수 있다. 즉 $T^r(V^*) \cong (T^r(V))^*$ 이다.
또한 $L_r(V) = \{f | f : V \times \cdot\cdot \times V \to \mathbb{R}, multilinear\}$이라 두면 다음의 universal property 로부터 $L_r(V) \cong (T^r(V))^*$임을 알 수 있다.

$$\begin{array}{ccc} V \times \cdot\cdot \times V & \xrightarrow{\pi} & V \otimes \cdot\cdot \otimes V = T^r(V) \\ multilinear\ f \searrow & & \swarrow \exists! \overline{f} \in L(T^r(V), W) \\ & W & \end{array}$$

따라서 $L_r(V) \cong (T^r(V))^* \cong T^r(V^*)$.

위의 내용을 $\Lambda(V)$에도 적용할 수 있다. 처음에 주었던 pairing $(*)$에서
$((\alpha_1, \cdot\cdot, \alpha_r), (v_1, \cdot\cdot, v_r)) = \begin{cases} det(\alpha_i(v_j)) \cdots I \\ \frac{1}{r!} det(\alpha_i(v_j)) \cdots II \end{cases}$
로 주면 det의 성질(행 혹은 열이 같은 것이 있으면 det값은 0이 된다.)에 의해 다음과 같은 quotient가 가능하다. 즉

$$\begin{array}{ccc} T^r(V^*) \times T^r(V) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \nearrow (\ ,\ ) = det \\ \Lambda^r(V^*) \times \Lambda^r(V) & & \end{array}$$

따라서 $(\ ,\ ) : \Lambda^r(V^*) \times \Lambda^r(V) \rightarrow \mathbb{R}$이 얻어지고 이 때 이 pairing이 nonsingular함은 위에서 한 것과 마찬가지로 보일 수 있다.
$A_r(V) = \{f \mid f : V \times \cdot\cdot \times V \rightarrow \mathbb{R}, multilinear\ , alternating\ map\}$ 이라 두면 이 역시 universal property에 의해 $A_r(V) \cong (\Lambda^r(V))^*$임을 알 수 있다. i.e.,

$$A_r(V) \cong (\Lambda^r(V))^* \cong \Lambda^r(V^*)\ .$$

6. View $\Lambda^r(V) \subset T^r(V)$.

다음 exact sequence 를 생각해보자.
$(*) \qquad 0 \rightarrow \mathbf{a}_r \rightarrow T^r(V) \xrightarrow{\pi} \Lambda^r(V) \rightarrow 0$
Define $s(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) := \frac{1}{r!} \sum_\sigma sgn(\sigma) v_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes v_{\sigma(r)}$.
Then s is a section, i.e., $\pi \circ s = id$ so that $T^r(V) = a_r \oplus s(\Lambda^r(V))$.

$(*)$ 에서 $0 \leftarrow \mathbf{a}_r^* \leftarrow (T^r(V))^* \xleftarrow{\pi^*} (\Lambda^r(V))^* \leftarrow 0$ 를 얻을 수 있고 따라서
$(\Lambda^r(V))^* \underset{\pi^*}{\hookrightarrow} (T^r(V))^*$ 로 볼 수 있다.

숙제 15. 다음 diagram이 commute함을 확인해보라.

$$\begin{array}{ccccc} L_r(V) & \cong & (T^r(V))^* & \cong & T^r(V^*) \\ \cup & & \uparrow \pi^* & & \uparrow s' \\ A_r(V) & \cong & (\Lambda^r(V))^* & \cong & \Lambda^r(V^*) \end{array}$$

7. Algebra structure on $A(V) = \bigoplus_r A_r(V)$.

$A_r(V) \cong \Lambda^r(V^*)$ 에서 algebra structure on $A(V)$는 $\Lambda(V^*)$의 algebra structure에서 induce된다.

명제 1 *For $f \in A_p(V), g \in A_q(V)$,*
(1) $$f \wedge_I g(v_1, \cdots, v_{p+q}) = \sum_{\sigma=(p,q)shuffle} (sgn\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) g(v_{\sigma(p+1)}, \cdots, v_{\sigma(q)})$$
$$= \frac{1}{p!q!} \sum_\sigma (sgn\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) g(v_{\sigma(p+1)}, \cdots, v_{\sigma(q)})$$
(2) $$f \wedge_{II} g(v_1, \cdots, v_{p+q}) = \frac{1}{(p+q)!} \sum_\sigma (sgn\sigma) f(v_{\sigma(1)}, \cdots, v_{\sigma(p)}) g(v_{\sigma(p+1)}, \cdots, v_{\sigma(q)})$$

(5절에서 I, II 설명)
증명 It suffices to show for $f = \epsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_p}$, $g = \epsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j_q}$ where $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ are dual basis of $e_1, \cdots, e_n$ of V.
$f \wedge g(v_1, \cdots, v_{p+q}) = (\epsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j_q})(v_1, \cdots, v_{p+q}) = det(\varepsilon(v))$ 이고 아래의 도움정리로부터 증명이 완성된다. (**숙제 16.**) □

보조정리 2 *(Lagrange formula)*
Given $A = (a_{ij}), n \times n$ matrix and for fixed p, let $A_I (I = i_1 < \cdots < i_p)$ be a $p \times p$ submatrix given by $(A_I)_{kl} = (a_{k,i_l}), k = 1, \cdots, p$ and $A_{\hat{I}}, \hat{I} = (1, \cdots, \hat{i_1}, \cdots, \hat{i_p}, \cdots, n) = (j_1 < \cdots < j_q) = J$, be a $q \times q$ submatrix given by $(A_{\hat{I}})_{kl} = (a_{p+k,j_l})$. Then
$$detA = \sum_I sgn(I, \hat{I}) detA_I detA_{\hat{I}}.$$

증명
$$\begin{aligned} detA &= \sum_\sigma (-1)^\sigma a_{1\sigma(1)} \cdots a_{p\sigma(p)} a_{p+1\sigma(p+1)} \cdots a_{n\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in sh(p,q)} \sum_{\rho \in S_p} \sum_{\tau \in S_q} (-1)^\sigma (-1)^\rho (-1)^\tau a_{1,\rho\sigma(1)} \cdots a_{p,\rho\sigma(p)} a_{p+1,\tau\sigma(p+1)} \cdots a_{n,\tau\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in sh(p,q)} \sum_{\tau \in S_q} (-1)^\sigma (-1)^\tau \Big(\sum_{\rho \in S_p} (-1)^\rho a_{1,\rho\sigma(1)} \cdots a_{p,\rho\sigma(p)} \Big) a_{p+1,\tau\sigma(p+1)} \cdots a_{n,\tau\sigma(n)} \\ &= \sum_{\sigma \in sh(p,q)} (-1)^\sigma detA_I detA_{\hat{I}} \end{aligned}$$
□

명제 3 *Let $f \in A_p(V)$ and $g \in A_q(V)$, then $f \wedge g = (-1)^{pq} g \wedge f$.*

증명 $f = \epsilon_{i_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{i_p}$, $g = \epsilon_{j_1} \wedge \cdots \wedge \epsilon_{j_q}$ 일때 보이면 충분한데 이 경우에는 분명하다. □

명제 4 $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$.

증명 $\Lambda(V^*)$의 associativity 로부터 분명하다. □

8. Interior multiplication.

정의 1 For $l \in End(\Lambda(V))$,
l is **derivation** if $l(u \wedge v) = l(u) \wedge v + u \wedge l(v)$.
l is **anti-derivation** if $l(u \wedge v) = l(u) \wedge v + (-1)^p u \wedge l(v)$, $u \in \Lambda^p(V)$.
l is **of deg k** if $l : \Lambda^p(V) \to \Lambda^{p+k}(V)$, $\forall p$.

Note. l is an anti-derivation if and only if

$$l(v_1 \wedge \cdots \wedge v_r) = \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} v_1 \wedge \cdot \cdot \wedge l(v_i) \wedge \cdot \cdot \wedge v_r, \ \ v_i \in V, \ i = 1, \cdots, r.$$

증명 $\Rightarrow) l(v_1 \wedge (v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)) = l(v_1)(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r) + (-1) v_1 \wedge l(v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)$ 이고, 귀납법을 쓰면 된다.
$\Leftarrow) u = v_1 \wedge \cdots \wedge v_p, v = v_{p+1} \wedge \cdots \wedge v_{p+q}$ 인 경우를 보이면 충분하다.

$$\begin{aligned} l(u \wedge v) &= l(v_1 \wedge \cdots \wedge v_{p+q}) \\ &= \textstyle\sum_i^p (-1)^{i+1} v_1 \wedge \cdot \cdot \wedge l(v_i) \cdot \cdot v_p \wedge v_{p+1} \wedge \cdot \cdot \wedge v_{p+q}) + \\ &\quad (-1)^p \textstyle\sum_j^q (-1)^{j+1} v_1 \wedge \cdot \cdot \wedge v_{p+1} \wedge \cdot \cdot\, l(v_{p+j}) \cdot \cdot \wedge v_{p+q} \\ &= l(u) \wedge v + (-1)^p u \wedge l(v). \end{aligned}$$

□

정의 2 For $x \in V$, define $i(x) = i_x : \Lambda(V^*)(\cong A(V))) \to \Lambda(V^*)(\cong A(V))$ by $(i_x(f))(v_2, \cdots, v_r) = f(x \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)$.

명제 5 *i_x is an anti-derivation of deg -1.*

증명 위 Note를 사용해서
$(i_x(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^r), v_2 \wedge \cdots \wedge v_r) = (\sum_i^r (-1)^{i+1} \alpha^1 \wedge \cdot \cdot \wedge i_x(\alpha^i) \wedge \cdot \cdot \wedge \alpha^r, v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)$ 를 보이면 된다. $x = v_1$이라 두면 위 식의 좌변은 $(\alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^r)(v_1 \wedge v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)$ 이므로 이는 $det(\alpha(v))$가 되고 우변에서 $i_x(\alpha^i) = \alpha^i(v_1)$은 상수이므로

$$(\sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} \alpha^1 \wedge \cdot \cdot \wedge i_x(\alpha^i) \wedge \cdot \cdot \wedge \alpha^r, v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)$$
$$= \sum_{i=1}^{r} (-1)^{i+1} \alpha^i(v_1)(\alpha^1 \wedge \cdot \cdot \wedge \hat{\alpha^i} \wedge \cdot \cdot \wedge \alpha^r, v_2 \wedge \cdots \wedge v_r)$$

이는 $det(\alpha(v))$의 첫번째 열벡터에 대한 cofactor expansion이므로 따라서 좌변과 우변은 모두 $det(\alpha(v))$로 같다.

□