Construction of new vector bundles from given ones

General rule: A functorial construction of a vector space from given ones gives rise to the corresponding vector bundle construction.

예: 벡터 공간에서 정의된 $*, \oplus, \otimes, \wedge, S, \cdots$ 들은 functorial construction이고 따라서 이것들은 vector bundle의 경우로도 그대로 확장할 수 있다.

이제 각각의 construction을 살펴보겠다.

먼저 vector bundle

$$
\begin{array}{l}
E = \bigcup_{p \in M} E_p \text{ with } \{\varphi_U\} \text{ and } \{g_{UV}\} \\
\downarrow \pi \\
M
\end{array}
$$

가 주어져 있다고 하자.

1. Dual bundle

a. total space:

우선 각각의 E_p는 벡터공간이므로 쌍대공간(dual) E_p^*가 존재하는것은 자명하고 대응되는 π^*도 마찬가지로 정의가 된다. 따라서 우선 set으로서의 E^*를 정의할 수 있다.

$$
\begin{array}{l}
E^* = \bigcup_{p \in M} E_p^* \\
\downarrow \pi^* \\
M
\end{array}
$$

b. local chart(local trivialization):

다음으로 E^*의 local trivialization φ_U^*는 E의 local trivialization $\varphi_U : \pi^{-1}U \to U \times \mathbb{R}^n$으로부터 각 point $p \in M$에 대해 $\varphi_U|_p : E_p \to p \times \mathbb{R}^n$을 얻는다. 이로부터 dual map $(\varphi_U|_p)^* : p \times \mathbb{R}^{n*} \to {E_p}^*$이 induce되고 이로부터 E^*의 local trivialization

$${\varphi_U^*}^{-1} : \pi^{*-1}U \to U \times \mathbb{R}^{n*}$$

가 정의된다.

c. transition:

마지막으로 이렇게 얻어진 local trivialization들 사이의 transition을 살펴보자.

$${\varphi_U^*}^{-1} \cdot \varphi_V^* = (\varphi_V \cdot \varphi_U^{-1})^* = ((\varphi_U \cdot \varphi_V^{-1})^{-1})^*$$

$$g_{UV}^*(p) = {\varphi_U^*}^{-1} \cdot \varphi_V^*|_{p\times\mathbb{R}^{n*}} \text{ and } g_{UV}(p) = \varphi_U \cdot \varphi_V^{-1}|_{p\times\mathbb{R}^n}$$

$$\therefore g_{UV}^* =^t (g_{UV}^{-1}) \text{ as matrices}$$

지난시간의 연습문제로부터 g_{UV}가 $\mathcal{C}^\infty$임을 알 수 있고 이과정(inverse를 취하고 transpose를 시키는 과정)은 algebraic process이므로 $\mathcal{C}^\infty$이 보존되므로 g_{UV}^*도 $\mathcal{C}^\infty$이다. 따라서 같은 연습문제로 부터 ${\varphi_U^*}^{-1} \cdot \varphi_V^*$가 $\mathcal{C}^\infty$이고 $\{{\varphi_U^*}^{-1}\}$가 E^*에 $\mathcal{C}^\infty$ 구조를 준다는 것을 알 수 있다.(이경우 topology는 ${\varphi_U^*}^{-1}$로 부터의 coherent topology) 즉 이렇게 정의한 dual bundle이 실제로 $\mathcal{C}^\infty$ vector bundle이 된다는 뜻이다.

2. Direct sum

같은 base를 가지는 두 bundle $E \to M$(with $\{\varphi_U\}, \{g_{UV}\}$), $F \to M$(with $\{\psi_U\}, \{h_{UV}\}$ 이 주어져 있다고 하자.

a. total space:
각각의 fibre E_p, F_p는 벡터 공간이므로 direct sum $E_p \oplus F_p$을 생각할 수 있다. 따라서

$$\begin{array}{c} E \oplus F := \bigcup_p (E_p \oplus F_p) \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$$

이 잘 정의된다.

b. local trivialization:

E의 local trivialization $\varphi_U : \pi^{-1}U \to U \times \mathbb{R}^n$, F의 local trivialization $\psi_U : \pi^{-1}U \to U \times \mathbb{R}^m$ 으로부터 앞에서처럼 먼저 fiberwise 정의된 map $\varphi_U|_p \oplus \psi_U|_p : E_p \oplus F_p \to p \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m)$을 $\varphi_U|_p$와 $\psi_U|_p$로부터 얻고, 이로부터 $\varphi_U \oplus \psi_U : \pi^{-1}U \to U \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m)$ 를 얻을 수 있다.

c. transition:

$$\begin{tikzcd} & E_p \oplus F_p \arrow[dl, "\varphi_U \oplus \psi_U"'] \arrow[dr, "\varphi_V \oplus \psi_V"] & \\ p \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m) & & p \times (\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^m) \arrow[ll, "g_{UV}(p) \oplus h_{UV}(p)"'] \end{tikzcd}$$

여기서 $g_{UV} \oplus h_{UV}$는 다음과 같은 행렬로 주어지므로 g_{UV}와 h_{UV}가 $\mathcal{C}^\infty$이면 $g_{UV} \oplus h_{UV}$가 $\mathcal{C}^\infty$이다.

$$\left(\begin{array}{c|c} g_{UV}(p) & 0 \\ \hline 0 & h_{UV}(p) \end{array} \right)$$

따라서 앞에서 처럼 $\{\varphi_U \oplus \psi_U\}$이 $\mathcal{C}^\infty$ vector bundle structure를 잘 정의한다.

3. Tensor product

a. total space:

같은 base를 가지는 두 bundle $E \to M$(with $\{\varphi_U\}, \{g_{UV}\}$), $F \to M$(with $\{\psi_U\}, \{h_{UV}\}$)에 대해 direct sum과 마찬가지로 각각의 fibre E_p, F_p는 벡터 공간이므로 tensor product $E_p \otimes F_p$을 생각할 수 있다. 따라서

$$\begin{array}{c} E \otimes F := \bigcup_{p \in M} E_p \otimes F_p \\ \downarrow \pi \\ M \end{array}$$

가 잘 정의된다.

b. local chart:

$$\varphi_U \otimes \psi_U : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m)$$

이것 역시 앞에서 처럼 각각의 점 p에서 pointwise하게 정의된 $\varphi_U|_p \otimes \psi_U|_p : E_p \otimes F_p \longrightarrow p \times (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m)$으로부터 얻어지는 map이다.

c. transition:

$$\begin{tikzcd} & E_p \otimes F_p \arrow[dl, "\varphi_U \otimes \psi_U"'] \arrow[dr, "\varphi_V \otimes \psi_V"] & \\ p \times (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m) & & p \times (\mathbb{R}^n \otimes \mathbb{R}^m) \arrow[ll, "g_{UV}(p) \otimes h_{UV}(p)"'] \end{tikzcd}$$

g_{UV}를 (g_{ij})로, h_{UV}는 H로 나타내자. 그러면 $g_{UV} \otimes h_{UV}$는 다음과 같은 $nm \times nm$행렬로 주어지므로

$$\begin{pmatrix} g_{11}H & g_{12}H & \dots \\ g_{21}H & g_{22}H & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

g_{UV}와 h_{UV}가 $\mathcal{C}^\infty$이면 $g_{UV} \otimes h_{UV}$가 $\mathcal{C}^\infty$이다.

4. Exterior product

a. total space:

주어진 bundle $E \to M$(with $\{\varphi_U\}, \{g_{UV}\}$)에 대해 E_p는 vector space이므로 $\bigwedge^r(E_p)$을 생각할 수 있다. 따라서

$$\bigwedge^r(E) := \bigcup_{p \in M} \bigwedge^r(E_p)$$

$$\downarrow \pi$$

$$M$$

가 잘 정의된다.

더 일반적으로 $\bigwedge(E) = \oplus \bigwedge^r(E)$은 $\bigwedge^r(E)$만 알면 direct sum을 통해 알 수 있다.

$$\bigwedge(E) = \oplus \bigwedge^r(E)$$

$$\downarrow \pi$$

$$M$$

b. local chart:

각각의 점 p에서 pointwise하게 $\bigwedge^r(\varphi_U|_p) : \bigwedge^r(E_p) \longrightarrow p \times \bigwedge^r(\mathbb{R}^n)$이 얻어지고, 이로부터 local trivialization

$$\bigwedge^r(\varphi_U) : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times \bigwedge^r(\mathbb{R}^n)$$

이 잘 정의된다.

c. transition:

$$\begin{array}{ccc} & \bigwedge^r(E_p) & \\ {\scriptstyle \bigwedge^r(\varphi_U|_p)} \swarrow & & \searrow {\scriptstyle \bigwedge^r(\varphi_V|_p)} \\ p \times (\bigwedge^r(\mathbb{R}^n)) & \overset{\bigwedge^r(g_{UV}(p))}{\longleftarrow} & p \times (\bigwedge^r(\mathbb{R}^n)) \end{array}$$

그리고 $\bigwedge^r(g_{UV})$은 g_{UV}가 p에 대한 $\mathcal{C}^\infty$map이므로 $\mathcal{C}^\infty$이다.

5. Pullback bundle

a. total space:

주어진 vector bundle $E \to M$(with $\{\varphi_U\}$)와 $\mathcal{C}^\infty$ map $f : N \to M$에 대해 pullback bundle은 각각의 $p \in N$에 대해 $f(p) \in M$에서의 vector space $E_{f(p)}$를 대응시킨다. 즉 pullback bundle은 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{array}{l} f^*E := \bigcup_{p \in N} E_{f(p)} \\ \downarrow \pi \\ N \end{array}$$

b. local chart:

$f(p)$의 근방 U에 대해

$$f^*\varphi_U : f^*E|_{f^{-1}(U)} \longrightarrow f^{-1}(U) \times \mathbb{R}^n$$

은 각각의 점 $p \in N$에서 pointwise하게 정의된 map

$$f^*E|_p = E_{f(p)} \xrightarrow{\varphi_U|_{f(p)}} f(p) \times \mathbb{R}^n = p \times \mathbb{R}^n$$

으로부터 정의된다.

c. transition:

$$
\begin{tikzcd}
& f^*E|_p := E_{f(p)} \arrow[dl, "\varphi_U|_{f(p)}"'] \arrow[dr, "\varphi_V|_{f(p)}"] & \\
p \times \mathbb{R}^n = f(p) \times \mathbb{R}^n & & f(p) \times \mathbb{R}^n = p \times \mathbb{R}^n \arrow[ll, "g_{UV}(f(p))"']
\end{tikzcd}
$$

여기서 g_{UV}와 f가 각각 $\mathcal{C}^\infty$이므로 $f^*g_{UV} := g_{UV} \circ f$는 $\mathcal{C}^\infty$이다.