Tensor fields and Forms

지금부터 $T^r(TM)$을 $T^r(M)$으로 $T^s(T^*M)$은 $T_s(M)$으로 쓰기로하자.
또한 이것들을 이용해서 다음을 정의한다.
$T^r_s(M) := T^r(M) \otimes T_s(M)$; tensor bundle of type (r,s)

정의 1 A $\mathcal{C}^\infty$**-section** σ of a vector bundle $E \xrightarrow{\pi} M$ over $U^{open} \subset M$ is a $\mathcal{C}^\infty$-map $\sigma : U \to E$ s.t. $\sigma(p) \in E_p,\ \forall p \in U$, i.e. $\pi \circ \sigma = id$

$\mathcal{C}^\infty(M, E) :=$ space of $\mathcal{C}^\infty$-sections.

A $\mathcal{C}^\infty$**-frame** for E over $U \subset M$ is a collection $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$ of $\mathcal{C}^\infty$ sections over U s.t. $\{\sigma_1(p), \cdots, \sigma_n(p)\}$ is a basis for E_p, $\forall p \in U$.

Note: U위에서의 frame을 가지고 있다는 것은 U에서 trivialization을가지고 있다는 것과 동치이다.

증명 $\Leftarrow$) local chart 가 존재한다는 것은 isomorphism $\pi^{-1}U \xrightarrow{\varphi_U} U \times \mathbb{R}^n$이 존재한다는 것이다. 이제 $\mathbb{R}^n$의 정규기저 $e_1, \cdots, e_n$들을 φ^{-1}로 보내면 frame이 얻어진다.

$\Rightarrow$) frame이 존재하므로 $\pi^{-1}U$의 점들은 $\sum v^i \sigma_i(x)$로 표현할 수 있다. 이제 이 점을 $U \times \mathbb{R}^n$위의 점 $(x, v^1, \cdots, v^n)$으로 보내는 map을 생각하면 이 map은 local chart가 된다. □

다음의 개념들도 정의 할 수 있다.

1. TM의 section을 vector field라 한다.
   T^*M의 section을 1-form이라 한다.
   $\bigwedge^p(T^*M)$의 section을 p-form이라 한다.
   $T^r_s(M)$의 section을 tensor field of type (r, s)이라 한다.

2. coordinate chart (U, x)에 대하여 bundle의 smooth structure 정의로 부터
   $\{\frac{\partial}{\partial x^1}, \cdots, \frac{\partial}{\partial x^n}\}$ 은 TM의 U위에서의 $\mathcal{C}^\infty$-frame 이 된다.
   $\{dx^1, \cdots, dx^n\}$ 은 T^*M의 U위에서의 $\mathcal{C}^\infty$-frame 이 된다.

Remark: 통상적으로 tensor notation을 쓸 때에 covariant한 index를 아래첨자로, contravariant한 index는 위첨자로 표기하면 편리하기 때문에(예를 들어 summation에서 dummy index에 대해 $\sum$을 빼고 쓰는 Einstein notation 등

을 이용하기에 편리) $\frac{\partial}{\partial x_i}$, dx_i대신에 $\frac{\partial}{\partial x^i}$, dx^i로 쓰기도 한다.

Exterior bundle, tensor bundle의 construction과 smooth structure의 정의로 부터 $\{dx^I\}$ 은 $\bigwedge^p(T^*M)$의 local chart U위에서의 $\mathcal{C}^\infty$-frame 이 되고,
(여기에서 I는 multi-index로서 즉 $I = (i_1, i_2, \cdots, i_p)$, $i_1 < i_2 < \cdots < i_p$이고 $dx^I = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$ 이다.)

$\{\frac{\partial}{\partial x^{i_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{i_r}} \otimes dx^{j_1} \otimes \cdots \otimes dx^{j_s}\}$ 은 $T^r_s(M)$의 U위에서의 $\mathcal{C}^\infty$-frame 이 된다.

Note: U위의 $\mathcal{C}^\infty$-frame $\{\sigma_1, \cdots, \sigma_n\}$이 주어져 있을 때, 임의의 section σ은 $\sum_i f^i \sigma_i$으로 나타낼 수 있다. 그러면 σ가 $\mathcal{C}^\infty$이라는 것과 각각의 i에 대하여 f^i가 $\mathcal{C}^\infty$(p에 관한 함수로서)이라는 것은 동치이다.

증명) 앞 Note로 부터 자명하다. □

예) α: p-form,
α is $\mathcal{C}^\infty \Leftrightarrow$ for some (U, x), $\alpha|_U = \sum \alpha_I dx^I$ where α_I is $\mathcal{C}^\infty$.

Notation: For a smooth vector bundle $E \to M$,

$\Gamma(E) = \mathcal{C}^\infty(M, E)$ = the space of smooth global sections of E

$\mathcal{C}^\infty(M, TM) = \mathcal{X}(M)$ = the space of $\mathcal{C}^\infty$ vector fields

$\mathcal{C}^\infty(M, \mathbb{R}) = \mathcal{F}(M)$ = the space of $\mathcal{C}^\infty$ functions on M

$\mathcal{C}^\infty(M, \bigwedge^r(T^*M)) = \mathcal{E}^r(M)$ = the space of r-forms

$\mathcal{C}^\infty(M, T^r_s(M)) = \mathcal{T}^r_s(M)$ = the space of tensor fields of type (r,s)

3. View an r-form $\alpha \in \mathcal{E}^r(M)$ as an alternating $\mathcal{F}$-linear map:

$\alpha \in \mathcal{E}^r(M)$일 때 α를 alternating $\mathcal{F}$-linear map $\alpha : \underbrace{\mathcal{X} \times \cdots \times \mathcal{X}}_{r} \longrightarrow \mathcal{F}$으로 볼 수 있다. 여기서

$\alpha(X_1, \cdots, X_r)(p) := \alpha_p(X_1(p), \cdots, X_r(p))$
for $\alpha_p \in \bigwedge^r(T_p^*M) = (\bigwedge^r(T_pM))^* = A_r(T_pM)$ [1](아래각주1)

locally $\alpha = \Sigma\alpha_I dx^I \Longrightarrow \alpha(X_1, \cdots, X_r)$ is clearly $\mathcal{C}^\infty$.

더욱이 정의로 부터 α가 $\mathcal{F}$ -linear, i.e. $\alpha(X_1, \cdots, fX_i, \cdots, X_r) = f\alpha(X_1, \cdots, X_i, \cdots, X_r)$ 임을 곧 알 수 있다.

Conversely $\forall\mathcal{F}$-linear alternating map is an r-form:

Given α : $\mathcal{F}$-linear, alternating and $X_1, \cdots, X_r \in T_pM$에 대해
$\alpha_p(X_1, \cdots, X_r) := \alpha(\widetilde{X_1}, \cdots, \widetilde{X_r})(p)$ for $\widetilde{X_i}$: $\mathcal{C}^\infty$-extension of X_i라 정의하자. 그러면 $\alpha_p \in \bigwedge^r(T_p^*M) = A_r(T_pM)$이다.

이제 $\alpha(\widetilde{X_1}, \cdots, \widetilde{X_r})(p)$가 extension의 선택에 상관없이 잘 정의되는 것을 보이자.

(*) $X_1, \cdots, X_r \in \mathcal{X}, X_1(p) = 0$일 때 $\alpha(X_1, \cdots, X_r)(p) = 0$이 되는 것을 보이면 충분하다. 왜냐하면 $\widetilde{X}'$이 또다른 extension이라 할 때

$X_1(p) = \widetilde{X_1}(p) = \widetilde{X_1}'(p) \Longrightarrow (\widetilde{X_1} - \widetilde{X_1}')(p) = 0$

그러면 (*)에 의해

$\alpha(\widetilde{X_1}, \widetilde{X_2}, \cdots, \widetilde{X_r})(p) = \alpha(\widetilde{X_1}', \widetilde{X_2}, \cdots, \widetilde{X_r})(p) = \alpha(\widetilde{X_1}', \widetilde{X_2}', \cdots, \widetilde{X_r})(p)$
$= \cdots = \alpha(\widetilde{X_1}', \widetilde{X_2}', \cdots, \widetilde{X_r}')(p)$가 성립한다.

[1]recall $\bigwedge^r(V^*) = (\bigwedge^r V)^* = A_r(V)$

그러면 $(*)$를 보이자.

$X_1 = \Sigma a_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ on U$\Longrightarrow X_1(p) = \Sigma a_i(p) \frac{\partial}{\partial x^i}|_p = 0 \Longrightarrow a_i(p) = 0 \quad \forall i$

Let φ be a bump function s.t. $\varphi(x) = 1 \ for \ x \in$K (K compact neighborhood $\subset U$) and $\varphi(x) = 0 \ for \ x \in U^c$

$X_1 = \varphi^2 X_1 + (1-\varphi^2)X_1 = \Sigma(\varphi a_i)(\varphi \frac{\partial}{\partial x^i}) + (1-\varphi^2)X_1$

$\alpha(X_1, \cdots, X_r)(p) = \Sigma(\varphi a_i)(p) \cdot \alpha(\varphi \frac{\partial}{\partial x^i}, X_2, \cdots, X_r)(p) + (1-\varphi^2)(p) \cdot \alpha(X_1, \cdots, X_r)(p)$

$=0 \quad (\because a_i(p) = 0$ and $(1-\varphi^2)(p) = 0)$