Exterior derivative

1. $d : \mathcal{F} = \mathcal{E}^0(M) \to \mathcal{E}^1(M)$ is defined by $df_p(X_p) = X_p f, \forall f \in \mathcal{F}, X_p \in T_pM$
$\quad f \mapsto df$

Check : df 는 $\mathcal{C}^\infty$ 1-form이다.

$$\begin{aligned}
&\text{Clearly } df_p \in T_p^*M \quad (\because df_p(X_p + cX_p') = df_p(X_p) + c \cdot df_p(X_p'))\\
&\Longrightarrow df = \sum a_j dx^j \text{ locally on (U,x)}\\
&\Longrightarrow a_i = df(\tfrac{\partial}{\partial x^i}) = \tfrac{\partial f}{\partial x^i} \quad : \mathcal{C}^\infty \quad (\because f \quad : \mathcal{C}^\infty)\\
&\Longrightarrow df = \sum_j \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j \quad : \mathcal{C}^\infty\\
&\therefore df \in \mathcal{E}^1(M)
\end{aligned}$$

Remark
(1) $d(x^i) = dx^i$:

$d(x^i)(\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial}{\partial x^j}(x^i) = \delta_{ij} = dx^i(\frac{\partial}{\partial x^j})$ 또는 $d(x^i)(X) = X(x^i) = dx^i(X)$

(2) $f : M \to \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^\infty$일 때 본질적으로 df는 f_*와 같다. 보다 정확하게

df :TM $\xrightarrow{f_*} T\mathbb{R} \to \mathbb{R}$이 된다.

$$\begin{aligned}
&X \mapsto f_*X\\
&\qquad\quad \parallel\\
&\qquad\quad \Box\tfrac{d}{dt} \mapsto \Box \text{(This map is a canonical translation.)}
\end{aligned}$$

$\Box = f_*(X)(t) = X(t \cdot f) = Xf = df(X)$ where $\mathbb{R} \xrightarrow{t} \mathbb{R}$ is the identity map.

(3) $d(f+g) = df + dg$
$d(fg) = g(df) + f(dg)$

$$\left(\begin{array}{l} d(f+g)(X_p) = X_p(f+g) = X_pf + X_pg \\ d(fg)(X_p) = X_p(fg) = g(X_pf) + f(X_pg) = (g(df) + f(dg))(X_p) \end{array} \right)$$

2. 지금까지 $d: \mathcal{E}^0 \to \mathcal{E}^1$를 정의 하였다. 이제 이를 일반화시킨 $d: \mathcal{E}^p \to \mathcal{E}^{p+1}$가 존재함을 보이자.

정리 1 *$d: \mathcal{F} \to \mathcal{E}^1$ can be extended uniquely to an anti-derivation of degree 1 on $\mathcal{E}$ s.t. $d^2 = 0$. i.e. $\exists!$ $d: \mathcal{E}^p \to \mathcal{E}^{p+1}$, $\forall p = 0, 1, 2, \cdots$ s.t.*
(1) $d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$
(2) $d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \qquad p = deg(\alpha)$
(3) df are as in 1 for $f \in \mathcal{F}$
(4) $d^2 = 0$

증명
우선 local하게 d를 정의하고 위의 네 가지 property와 uniqueness를 check한 다음 global하게 확장하자.

Local existence:

On (U, x), let $\alpha = \sum_I f_I dx^I$, where $dx^I = dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}$.
Define $d\alpha := \sum_I df_I \wedge dx^I$
(1)~(4) property를 만족하는 operator가 있다면 이렇게 정의될 수 밖에 없다. 왜냐하면

$$d\alpha = \sum_I d(f_I dx^I) = \sum_I (df_I \wedge dx^I + f_I \wedge d(dx^I)) = \sum_I df_I \wedge dx^I$$
$\smile$(by (1)) $\smile$(by (2)) $\smile$(by 아래각주[1]).

위에서 정의된 d는 $d^2 f = 0, \forall f \in \mathcal{F}$을 만족한다.

$$\begin{aligned} \because d(df) &= d(\sum_i \frac{\partial f}{\partial x^i} dx^i) = \sum_i d(\frac{\partial f}{\partial x^i}) \wedge dx^i \qquad \text{(by definition)} \\ &= \sum_{i,j} \frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial f}{\partial x^i}) dx^j \wedge dx^i \\ &= \sum_{i<j} (\frac{\partial}{\partial x^j}(\frac{\partial f}{\partial x^i}) - \frac{\partial}{\partial x^i}(\frac{\partial f}{\partial x^j}))(dx^j \wedge dx_i) \ (\because dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i) \\ &= 0 \end{aligned}$$

이제 d on U가 (1)~(4)의 property를 만족시키는 것을 check하자.

(1) clear since $d(f+g) = df + dg$ and $\alpha + \beta = \sum (f_I + g_I) dx^I$
for $\alpha = \sum f_I dx^I$, $\beta = \sum g_J dx^J$

[1] $d(dx^I) = d(dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_p}) = \Sigma(-1)^{j+1} dx^{i_1} \wedge \cdots dd(x^{j+1}) \cdots \wedge dx^{i_p} = 0$ ($\because dd(x^{j+1}) = 0$ by (4))

(2) $$\begin{aligned} d(\alpha\wedge\beta) &= d(\sum_{I,J} f_I g_J dx^I\wedge dx^J) = \sum_{I,J} d(f_I g_J)\wedge dx^I \wedge dx^J \\ &= \sum\{(df_I)g_J\wedge dx^I\wedge dx^J\} + \sum\{f_I(dg_J)\wedge dx^I\wedge dx^J\} \\ &= d\alpha\wedge\beta + (-1)^p\alpha\wedge d\beta \end{aligned}$$

(3) 따로 증명 불필요.

(4) $d^2\alpha = d(\sum df_I\wedge dx^I) = \sum_I\{d(df_I)\wedge dx^I - df_I\wedge d(dx^I)\} = 0$

Local uniqueness:

d' 을 위의 성질을 모두 만족하는 또다른 local operator라 하자. 그러면 (3)에 의해서 $d'x_i = dx_i$을 만족한다. 이를 이용하여 다음과 같이 local uniqueness를 증명할 수 있다.

$$\begin{aligned} d'\alpha &\underbrace{=}_{\text{(by (1))}} \sum d'(f_I dx^I) \underbrace{=}_{\text{(by (2))}} \sum(d'f_I\wedge dx^I + f_I d'(dx^I)) \\ &= \sum(d'f_I)\wedge dx^I \quad \text{(by 아래각주 }^2) \\ &= \sum(df_I)\wedge dx^I \quad \text{(by (3))} \\ &= d\alpha \end{aligned}$$

Global existence

주어진 $\alpha\in\mathcal{E}^p$에 대해 위에서 local한 d의 존재와 유일성을 증명하였다. 이제 d를 다음과 같이 global하게 확장시키자.

$d\alpha|_U := d(\alpha|_U)$

라 정의하자. 그러면 $d\alpha$는 local uniqueness에 의해 잘 정의된다. 그리고 이 d는 (1)~(4) 조건을 만족함을 다음과 같이 알 수 있다.

(1), (2)는 $+, \wedge$가 pointwise operation이므로 잘 성립한다. 예컨데

$$d(\alpha+\beta)|_U = d((\alpha+\beta)|_U) = d(\alpha|_U+\beta|_U) = d(\alpha|_U)+d(\beta|_U) = d\alpha|_U + d\beta|_U = (d\alpha+d\beta)|_U$$

(3) 따로 증명 불필요.

(4) $d^2\alpha = 0 \quad \because d^2\alpha|_U = d(d\alpha|_U) = dd(\alpha|_U) = d^2(\alpha|_U) = 0$

[2] (3)과 (4)에 의해
$$\begin{aligned} d'(dx^{i_1}\wedge\cdots dx^{i_p}) &= d'(dx^{i_1})\wedge dx^{i_2}\cdots dx^{i_p} - dx^{i_1}\wedge d'(dx^{i_2})\cdots dx^{i_p}\cdots + (-1)^p dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\cdots d'(dx^{i_p}) \\ &= d'^2(x^{i_1})\wedge dx^{i_2}\cdots dx^{i_p} - dx^{i_1}\wedge d'^2(x^{i_2})\cdots dx^{i_p}\cdots + (-1)^p dx^{i_1}\wedge dx^{i_2}\cdots d'^2(x^{i_p}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Global uniqueness

d'을 (1)~(4)를 만족시키는 또 다른 global operator라 하자. 그러면 먼저 d'은 (1)~(4)를 만족하는 U상에서의 operator $d' : \mathcal{E}^p(U) \to \mathcal{E}^{p+1}(U)$를 induce하는 것을 보이자. 이것을 보이기 위해 d'이 "local operator" 임을 보이자. 즉,

$(*)\ \alpha|_U \equiv 0 \Longrightarrow d\alpha|_U \equiv 0\ for\ \alpha \in \mathcal{E}^p(U)$

이 성립함을 보이자. 이 조건은 U상에서의 $d\alpha$값을 α의 U상에서의 값에만 의존한다는 뜻이다. $(*)$를 보이려면 $\forall p \in U,\ d\alpha(p) = 0$임을 보이면 된다 :

U에 들어가는 p의 작은 neighborhood V에 대해 ,
$\exists \varphi$ a bump function s.t. 1 on V and 0 on U^c
$d(0)(p) = d(\varphi \cdot \alpha)(p) = d\varphi(p) \wedge \alpha(p) + \varphi(p)d\alpha(p) = d\alpha(p)$
$\therefore d\alpha(p) = 0$ (by 아래각주[3])

이제 $\alpha \in \mathcal{E}^p(U)$가 주어졌다고 하자. 이 α에 대해 $d'\alpha(p) := d'(\varphi\alpha)(p),\ \ \forall p \in U$라고 정의하면 위 $(*)$에 의해 bump function φ의 선택에 관계없이 잘 정의된다.

이렇게 정의된 $d' : \mathcal{E}^p(U) \to \mathcal{E}^{p+1}(U)$는 (1)~(4)를 만족시키는 것을 쉽게 check할 수 있다. 더욱이, $\widetilde{\alpha}$가 α의 global extension이라면 $d'\alpha = d'\widetilde{\alpha}|_U$이 성립함을 알 수 있다.
$(\because \forall p \in U, d'\alpha(p) := d'(\varphi\alpha)(p) = d'\widetilde{\alpha}(p)$ by $(*))$

따라서 local uniqueness에 의해 $d = d'$ on U이고
$(d'\alpha)|_U = d'(\alpha|_U) = d(\alpha|_U) = (d\alpha)|_U$이 모든 U에 대해 성립하므로

$\therefore$ globally $d' = d$

□

[3] (1)에 의해 $d(0) + d(0) = d(0) \Longrightarrow d(0) = 0$

3. Invariant definition of $d\omega$:

Recall $r-form \Longleftrightarrow \mathcal{F}$-linear alternating map $\underbrace{\mathcal{X}\times\cdots\times\mathcal{X}}_{r} \longrightarrow \mathcal{F}$

$$\text{I. } d\omega(X_0,\cdots,X_r) = \sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i(w(X_0,\cdots,\widehat{X_i},\cdots,X_r)) + \sum_{0\le i<j\le r}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\cdot,\widehat{X_i},\cdots,\widehat{X_j},\cdots,X_r)$$

$$\text{II. } d\omega(X_0,\cdots,X_r) = \tfrac{1}{r+1}\{\sum_{i=0}^{r}(-1)^i X_i(w(X_0,\cdots,\widehat{X_i},\cdots,X_r)) + \sum_{0\le i<j\le r}(-1)^{i+j}\omega([X_i,X_j],X_0,\cdot,\widehat{X_i},\cdots,\widehat{X_j},\cdots,X_r)\}$$ (아래각주 [4])

ω가 1-form일 때 윗 식을 증명해 보자. ω가 1-form일 때 윗 식의 우변을 다음과 같이 두자.

$$"d\omega"(X_0,X_1) \overset{I.}{:=} X_0\omega(X_1) - X_1\omega(X_0) - \omega([X_0,X_1])$$

$$\overset{II.}{:=} \tfrac{1}{2}(X_0\omega(X_1) - X_1\omega(X_0) - \omega([X_0,X_1]))$$

우선 $"d\omega"$가 2-form임을 보이기 위해 2-form이 $\mathcal{F}$-linear alternating map임을 이용하자. 이를 보이려면 다음 세 가지만 check하면 된다.

$$"d\omega"(X_0+X_0',X_1) = "d\omega"(X_0,X_1) + "d\omega"(X_0',X_1)$$
$$"d\omega"(fX_0,X_1) = f"d\omega"(X_0,X_1)$$
$$"d\omega"(X_0,X_1) = -"d\omega"(X_1,X_0)$$

그런데 이 세가지는 정의로 부터 잘 성립함을 쉽게 알 수 있다.

이제 $"d\omega" = d\omega$임을 보이자. Locally check 하면 충분한데

local chart U위에서 $\omega = \sum a_j dx^j \Longrightarrow d\omega = \sum_j da_j \wedge dx^j = \sum_{i,j}\frac{\partial a_j}{\partial x^i}dx^i\wedge dx^j$.

Let $"d\omega" = \sum_{i<j} \Box\, dx^i\wedge dx^j$

$\Longrightarrow \Box = "d\omega"(\frac{\partial}{\partial x^i},\frac{\partial}{\partial x^j}) = \frac{\partial}{\partial x^i}a_j - \frac{\partial}{\partial x^j}a_i$이므로 $"d\omega" = d\omega$이 성립한다.

(숙제) 윗 식을 일반적인 p-form에 대해서 증명하여라. (참고 Spivak p 289)

---

[4] $\alpha^1\wedge\cdots\wedge\alpha^r(v_1,\cdots,v_r) = det(\alpha^i(v_j))\ \cdots$ I.
$= \frac{1}{r!}det(\alpha^i(v_j))\cdots$ II. 으로 각각 pairing을 정의하였을 때