deRham cohomology

이번에는 우리가 배운 exterior differential operator d를 가지고 cohomology를 구성해 보겠다.

먼저 M^n에 대하여 다음의 chain complex를 얻을 수 있다.

$$0 \rightarrow \mathcal{E}^0(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^1(M) \xrightarrow{d} \mathcal{E}^2(M) \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{E}^n(M) \rightarrow 0$$

(vector space들 V_i(더 일반적으로 module)의 sequence에서 $d^2 = 0$를 만족하는 vector space homomorphism $d : V_i \rightarrow V_{i+1}$이 존재하는 경우 chain complex라고 한다.)

이경우 각각의 stage $\mathcal{E}^p$에서 im d와 ker d를 살펴보면 $d^2 = 0$의 조건 때문에 im $d \subset$ ker d가 만족됨을 알 수 있다.
$B_p :=$ im $d = \{$exact p - forms$\}$ 와 $Z_p :=$ ker $d = \{$closed p - forms$\}$로 표현하자.
이제 p-th deRham cohomology $H^p(M)$을 정의 할 수 있다.

$$H^p(M) = Z_p/B_p$$

즉 deRham cohomology란 exact가 아닌 closed form들이 얼마나 많이 존재하는지를 측정(measure)하는 척도가 된다.

ex) closed form 이면서 exact form이 아닌 예

먼저 $M = \mathbb{R}^2 \setminus O$ 에서 각도 함수 θ는 global하게 정의되지 못한다. (branch cut을 생각) 그러나 local하게는 항상 θ가 잘 정의 되므로 이것을 이용해
$\alpha = d\theta$ 를 생각하면 d 가 local한 개념이므로 α는 잘(global하게)정의된다.
그런데 α는 마치 exact처럼 보이지만 θ가 global하게 정의 되지 않기 때문에 α는 exact가 아니다.
반면에 $d\alpha$를 생각하면 local하게 $d^2\theta$가 되므로 0이 되고 따라서 α는 closed이다.
$H^1(\mathbb{R}^2 \setminus O) =< \alpha >$

이제 0번째 cohomology에 관해 생각해보면 ker 이 trivial이므로
$H^0(M) = Z_0(M)$ 이 되는데 Z_0의 원소란 다름아닌 locally constant function들이다. 그러므로 특별히 M이 connected인 경우라면

locally constant $\Rightarrow$ constant 이므로 $H^0(M) = \{\text{constant functions on M}\}$이고
한편$\{\text{constant functions on M}\} \cong \mathbb{R}$이므로

$H^0(M) = \mathbb{R}$를 얻는다.

다음 정리는 매우 중요한데 우리의 수업에서는 일단 Fact로 받아들이고 증명은 생략한다.

정리 1 *(de Rham Theorem)*
$H^p_{deRham}(M) \cong H^p_{sing}(M, \mathbb{R})$
(where H^p_{sing} is the singular cohomology).

마지막으로 이렇게 정의한 H^p들은 manifold들의 category에서 group category로 가는 functor(정확하게는 contravariant functor)가 됨을 살펴보겠다.

먼저 manifold사이의 map $\varphi : M \to N; \mathcal{C}^\infty$에 대하여
$\varphi^* : \mathcal{E}(N) \to \mathcal{E}(M)$가 algebra homorphism이 되고 $\varphi^* \circ d = d \circ \varphi^*$이 성립하는 것은 이미 살펴보았다. 이것을 그대로 $H^p(N)$, $H^p(M)$사이의 map으로 확장할 수 있는데 그것은 다음의 사실 때문이다.

$\varphi^* Z_p(N) \subset Z_p(M)$
$\varphi^* B_p(N) \subset B_p(M)$

즉 φ^*는 closedness와 exactness를 보존한다는 뜻이다. (이 사실에 대한 증명은 diagram chasing으로 바로 알 수 있다.)

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \to & \mathcal{E}^0(M) & \to & \cdots & \to & \mathcal{E}^{i-1}(M) & \to & \mathcal{E}^i(M) & \to & \mathcal{E}^{i+1}(M) & \to & \cdots \\
 & & \uparrow{\scriptstyle\varphi^*} & & & & \uparrow{\scriptstyle\varphi^*} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi^*} & & \uparrow{\scriptstyle\varphi^*} & & \\
0 & \to & \mathcal{E}^0(N) & \to & \cdots & \to & \mathcal{E}^{i-1}(N) & \to & \mathcal{E}^i(N) & \to & \mathcal{E}^{i+1}(N) & \to & \cdots
\end{array}$$

그러므로 $\varphi^* : H^p(N) = Z_p(N)/B_p(N) \to Z_p(M)/B_p(M) = H^p(M)$을 정의할 수 있다.
(좀더 formal하게는 φ대신에 $H^p(\varphi)$)
그밖의 조건들(identity 를 identity로 보내는 것, composition을 보존하는 것 등)도 자명하게 성립하므로 H^p가 contravariant functor가 됨을 알 수 있다.