1. Integration of n-forms on oriented M.

Recall : Change of variable formula.

**그림

$\int_{\varphi(D)} f dx_1 \cdots dx_n = \int_D f \circ \varphi |det \varphi_*| du_1 \cdots du_n.$

If φ is orientation-preserving, $\int_{\varphi(D)} f dx_1 \cdots dx_n = \int_D f \circ \varphi \ (det\, \varphi_*) du_1 \cdots du_n.$

$\mathbb{R}^n$에서의 n-form $\omega = f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$를 생각해보자. $\mathbb{R}^n$에서 n-form에 대한 적분은 $\int \omega = \int f dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = \int f dx_1 \cdots dx_n =$ 으로 정의한다. 그러면

$$\begin{aligned}
\varphi^* \omega &= \varphi^*(f) \varphi^*(dx_1) \wedge \cdots \wedge \varphi^*(dx_n) \\
&= (f \circ \varphi) d(\varphi^* x_1) \wedge \cdots \wedge d(\varphi^* x_n) \\
&= (f \circ \varphi) d(x_1 \circ \varphi) \wedge \cdots d(x_n \circ \varphi) \\
&= (f \circ \varphi) det(\tfrac{\partial x}{\partial u}) du_1 \wedge \cdots \wedge du_n \qquad \text{(note that } d(x_i \circ \varphi) = \textstyle\sum_j \frac{\partial x_i}{\partial u_j} du_j) \\
&= f \circ \varphi \ det \varphi_* du_1 \wedge \cdots \wedge du_n.
\end{aligned}$$

따라서 위 변수변환 공식은 다음과 같이 간단히 표시할 수 있다.

$$\int_{\varphi(G)} w = \int_G \varphi^* w.$$

If φ is orientation-reversing, then $\displaystyle\int_{\varphi(G)} w = -\int_G \varphi^* w.$

이제 manifold 위에서의 n-form의 적분을 정의하자. 먼저 ω를 $supp\ \omega \subset (U, x)$, a positive coordinate chart(i.e., x는 orientation preserving)를 만족하는 n-form이라고 두자. (즉 single chart에 포함된다.) 이 ω에 대해 적분을 다음과 같이 정의한다.

$$\int_M \omega := \int_{\widetilde{U}} \varphi^* \omega, \qquad \varphi = x^{-1}, \widetilde{U} = x(U).$$

$$(\int_M \omega := -\int_{\widetilde{U}} \varphi^* \omega, \qquad \text{if } \varphi \text{ is orientation-reversing.})$$

이 정의가 잘 정의됨을 보이자. coordinate chart의 선택에 무관함을 보이기 위해 (U, y)를 다른 positive coordinate chart 라고 두자.

**그림

$\widetilde{\widetilde{U}} = y(U)$, $\psi = y^{-1}$라고 두면, transition map $x \circ \psi$는 $\mathbb{R}^n$간의 함수가 되고 여기에 변수변환 공식을 쓸 수 있다. 그러면

$$\int_{\widetilde{U}} \varphi^* \omega = \int_{\widetilde{\widetilde{U}}} (x \circ \psi)^* (\varphi^* \omega) = \int_{\widetilde{\widetilde{U}}} \psi^* \omega, \quad (x = \circ \varphi = x \circ x^{-1}\text{이므로})$$

$\therefore \int_{\tilde{U}} \varphi^*\omega = \int_{\tilde{\tilde{U}}} \psi^*\omega.$

일반적으로 ω , n-form with compact support on orientable M, 에 대해서 적분을 정의하자. 먼저 finite cover $\mathcal{U} = \{U_i\}$ of positive coordinate charts를 $\mathcal{U} = \bigcup U_i \supset$supp ω 를 만족하게끔 잡는다. $\{\rho_i\}$ 를 partition of unity(subordinate to $\{U_i\}$ on $\mathcal{U}$)로 두고 다음과 같이 적분을 정의한다.

$$\int_M \omega := \sum_i \int_M \rho_i\omega.$$

위의 정의 역시 cover $\mathcal{U}$와 partition of unity 의 선택에 무관하게 잘 정의됨을 보일 수 있다. $\mathcal{V} = \{V_j\}, \{\tau_j\}$를 또다른 cover,partition of unity라고 두자. 그러면

$$\sum_j \int_M \tau_j\omega = \sum_j \sum_i \int_M \rho_i(\tau_j\omega) \quad \text{(적분의 정의에 의해)}$$

각 $\rho_i\omega$들은 single coordinate U_i안에 있으므로 additive 이다. 따라서 위 식은

$$\sum_j \int_M \tau_j\omega = \sum_i \int_M (\sum_j \tau_j)\rho_i\omega = \sum_i \int_M \rho_i M.$$

Exercise.

(1) $\mathcal{E}_c^k(M)$=the space of differentiable k-forms on M with compact support.

Then $\displaystyle\int_M : \mathcal{E}_c^k(M) \to \mathbb{R}$ is linear.

(2) $\varphi : M \to N$, a diffeomorphism. Then

$$\int_M \varphi^*\omega = \pm \int_N \omega \quad (+\text{: if } \varphi \text{ is orientation-preserving, } - \text{ : if } \varphi \text{ is orientation-reversing.})$$

(3) $\varphi : \widetilde{M} \to M$, an n-fold covering with induced orientation. Then

$$\int_{\widetilde{M}} \varphi^*\omega = n \int_M \omega.$$