2. Stokes' theorem.

정리 1 *For* (M^n, μ) , $(\partial M, \partial\mu)$, $i^* : \partial M \hookrightarrow M$ *and* $\omega \in \mathcal{E}_c^{n-1}(M)$,

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$$

Remark. 여기서 $\int_{\partial M} \omega$는 보다 엄밀하게 말하면 $\int_{\partial M} i^*\omega$이고 $\partial M = \emptyset$이면 0으로 정의한다.

증명 1. (Easy case)
Suppose $supp\,\omega \subset (U, x)$, a positive coordinate chart (single chart). Then ω can be written as $\omega = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} f_i dx_1 \wedge \cdots \wedge \overset{\wedge}{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$ with $supp\, f_i \subset U$.
Then $d\omega = \sum_i (-1)^{i-1} \sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_1 \wedge \cdots \wedge \overset{\wedge}{dx_i} \wedge \cdots \wedge dx_n$
여기서 $j = i$일 때만 항이 없어지지 않으므로 따라서

$$d\omega = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

$$\begin{aligned}
\int_M d\omega &= \int_{\mathbb{H}^n} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial (f_i \circ x^{-1})}{\partial u_i} du_1 \cdots du_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{u_n, \cdots, u_2} \underbrace{\int_{-\infty}^{0}}_{u_1} \frac{\partial (f_i \circ x^{-1})}{\partial u_i} du_1 \cdots du_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{0} \frac{\partial (f_1 \circ x^{-1})}{\partial u_1} du_1 du_2 \cdots du_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} [f_1 \circ x^{-1}]_{-\infty}^{0} du_2 \cdots du_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} (f_1 \circ x^{-1})(0, u_2, \cdots, u_n) du_2 \cdots du_n \\
&= \int_{\partial M} i^*\omega
\end{aligned}$$

위 식에서 $supp\, f_i$는 U 안에 있다는 사실로부터 $-\infty, \infty$에서의 적분값 $(f_2 \circ x^{-1})(\pm\infty) = 0, (f_1 \circ x^{-1})(-\infty)$은 모두 0임을 이용하였다.

2. (General case)
Choose a finite cover $\{U_i\}$ of positive coordinate chart such that $supp\,\omega \subset \bigcup U_i$ and let $\{\rho_i\}$ be a partition of unity subordinate to $\{U_i\}$. Then

$$\int_M d\omega = \int_M \sum_i \rho_i d\omega = \int_M \sum_i d(\rho_i \omega)$$

$$= \sum_i \int_M d(\rho_i \omega) = \sum_i \int_{\partial M} \rho_i \omega = \int_{\partial M} \sum_i \rho_i \omega = \int_{\partial M} \omega. \qquad \square$$

Remark. $\phi : N \to M$ 에 대해 integral along ϕ를 $\int_\phi \omega = \int_N \phi^* \omega$ 로 정의한다. 또한 $\phi : N^n \to M^n$에 대해 $\phi^{-1}(compact) = compact$일 때 ϕ를 proper라고 한다.
ϕ가 proper일 때 $\partial\phi = \phi \circ i : \partial N \to M$ 이라 두면 $\omega \in \mathcal{E}_c^{n-1}(M)$에 대해
$\displaystyle\int_\phi d\omega = \int_{\partial\phi} \omega$ 이 성립한다.

(증명) $\displaystyle\int_\phi d\omega = \int_N \phi^* d\omega = \int_N d(\phi^*\omega) = \int_{\partial N} i^* \phi^* \omega = \int_{\partial N} (\phi \circ i)^* \omega = \int_{\partial\phi} \omega$