3. Classical versions in $\mathbb{R}^n$.

1. dim M=1 and orientable.

그림 9-1

Stokes 정리 $\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega$ 에서 ω는 0-form 이므로 함수이다. 즉 $f : M \to \mathbb{R}$ 로 표현하면 $\displaystyle\int_M df = \int_{\partial M} f$ 가 된다. ∂M 은 위 그림에서 두 점 P, Q가 되고 여기에 orientation을 생각해서 $\int_{\partial M} f = f(Q) - f(P)$로 정의한다. 실제로 M이 $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ 으로 주어지는 경우 이를 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned}\int_M df &= \int_{[a,b]} \sigma^*(df) = \int_a^b \sigma^*(df) \\ &= \int_a^b d(f\circ\sigma) = \int_a^b \frac{d}{dt}(f\circ\sigma)dt = (f\circ\sigma)(b) - (f\circ\sigma)(a) \\ &= f(Q) - f(P)\end{aligned}$$

이는 미적분학의 기본정리와도 같다.

2. dim $M = 2, M \subset \mathbb{R}^2$ with standard orientation.

그림 9-2

여기서의 ω는 $\mathbb{R}^2$에서의 1-form이고 이를 $\omega := Pdx + Qdy$로 쓸 수 있다. 직접 계산에 의해 $d\omega = (\dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y})dx \wedge dy$ 임을 알 수 있고 그러면 $\mathbb{R}^2$에서의 Stokes 정리는 다음과 같이 표현되는데 이는 Green 정리와 같음을 알수 있다.

$$\int_M (Q_x - P_y)dxdy = \int_{\partial M} Pdx + Qdy$$

3. dim $M = 2, M \subset \mathbb{R}^3$.

그림 9-3

먼저 $\mathbb{R}^3$에 standard orientation으로 주고 M의 orientation을 normal vector의 선택으로 주자.

ω가 1-form일 경우 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$ 라 두면 직접 계산에 의해
$d\omega = (R_y - Q_z)dy \wedge dz - (P_z - R_x)dx \wedge dz + (Q_x - P_y)dx \wedge dy$ 이고
따라서 $\mathbb{R}^3$에서는 다음과 같이 표현된다.

$$\int_M (R_y - Q_z)dy \wedge dz - (P_z - R_x)dx \wedge dz + (Q_x - P_y)dx \wedge dy = \int_{\partial M} Pdx + Qdy + Rdz.$$

이것을 미적분학 책에서 보는 모양으로 더 바꾸려면 다음과 같이 하면 된다.
"$d\sigma$"를 M상의 Riemannian volume form이라 두자. 다시 말해 한 점 $p \in M$에서 (v_1, v_2)를 T_pM의 positive orthonormal basis라 두고 (ϵ_1, ϵ_2)를 이것의 dual basis라 두었을 때 "$d\sigma$" $:= \epsilon_1 \wedge \epsilon_2$로 정의한다. 이 때 ν의 정의는 positive orthonormal basis의 선택에 무관하다.(**Exercise**)
일반적으로 어떤 2-form $\eta = ady \wedge dz - bdx \wedge dz + cdx \wedge dy$가 주어지면 적당한 f에 대해 $\eta = f$"$d\sigma$"로 쓸 수 있고 vector field $G = (a, b, c)$라 두면

$$f = \eta(v_1, v_2) = \begin{vmatrix} a & b & c \\ & v_1 & \\ & v_2 & \end{vmatrix} = G \cdot (v_1 \times v_2) = G \cdot N$$

으로 표시할 수 있다. 여기서 $N = v_1 \times v_2$은 M상의 orientation에 의해 결정된 unit normal vector field가 된다.
특히 이 식에서 $N = (a_1, a_2, a_3)$라 두면 G 대신 N을 사용하여 "$d\sigma$" $= (N \cdot N)$"$d\sigma$" $= a_1 dy \wedge dz - a_2 dx \wedge dz + a_3 dx \wedge dy$가 된다.

이제 $\omega = Pdx + Qdy + Rdz$, vector field $F = (P, Q, R)$라 두면
$d\omega = (Q_x - P_y)dx \wedge dy - (P_z - R_x)dx \wedge dz + (R_y - Q_z)dy \wedge dz$
$\quad := adx \wedge dy - bdx \wedge dz + cdy \wedge dz$
라 두면 $\nabla \times F = (a, b, c)$가 되므로 위에서 $d\omega = (\nabla \times F) \cdot N$"$d\sigma$" 가 되고
$\displaystyle\int_M d\omega = \int_M (\nabla \times F) \cdot N$"$d\sigma$" 가 된다.
한편 ∂M상에서 induced orientation 방향으로 unit tangent vector를 T라 두면 이것의 dual "ds"가 Riemannian orientation volume form이 되고 $\omega = g$"ds"라 두면 $g = \omega(T) = F \cdot T$가 되어 $\displaystyle\int_{\partial M} \omega = \int_{\partial M} (F \cdot T)$"$ds$" 가 된다. 따라서 Stokes 정리는 다음과 같이 표시할 수도 있다.

$$\int_M \nabla \times F \cdot N d\sigma = \int_{\partial M} F \cdot T ds.$$

4. dim $M = 3, M \subset \mathbb{R}^3$.

그림 9-4

ω가 2-form일 경우 $\omega = ady \wedge dz - bdx \wedge dz + cdx \wedge dy$라 두면
$d\omega = (a_x + b_y + c_z)dx \wedge dy \wedge dz$ 가 된다. 이를 Stokes 정리에 대입하면
$\displaystyle\int_M (a_x + b_y + c_z)dx \wedge dy \wedge dz = \int_{\partial M} ady \wedge dz - bdx \wedge dz + cdx \wedge dy.$
위의 식을 vector notation으로 표시하자. 즉 $F = (a, b, c)$라 두면 앞에서 $\omega = F \cdot N$"$d\sigma$"가 되고 $d\omega = (divF)dx \wedge dy \wedge dz$가 되어 Stokes 정리는 다음과 같이 표현된

다.
$$\int_M (divF) dxdydz = \int_{\partial M} F \cdot N" d\sigma"$$
이는 발산정리(Gauss 정리)임을 알 수 있다.