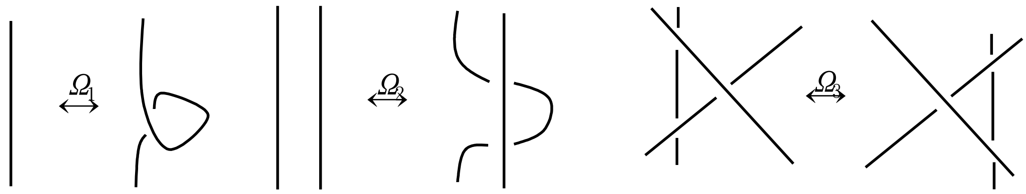
2004년 3월 19, 26일 세미나 자료

[Knot, (Regular) Knot diagram]

Def. We say that two knots K_1 and K_2 are equivalent, if there exists an orientation-preserving homeomorphism of R^3 that maps K_1 to K_2.

Def. Reidemeister Moves



Def. Braid group

$$B_n = \left< \sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_{n-1} \;\middle|\; \begin{array}{l} \sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_i \text{ if } |i-j| \geq 2 \\ \sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i = \sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1} \end{array} \right>$$

[$B_\infty = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, (closure of β)= $\widehat{\beta}$]

Def. Markov Moves ~

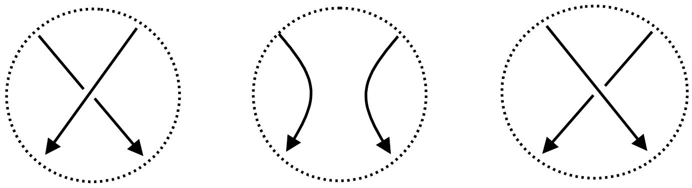
(M1) $\beta \sim \gamma\beta\gamma^{-1}$ where β, $\gamma \in B_n$

(M2) $\beta \sim \beta\sigma_n \sim \beta\sigma_n^{-1}$ where $\beta \in B_n$

Thm. (Markov) For β, $\beta' \in B_\infty$

$\widehat{\beta}$ and $\widehat{\beta'}$ are equivalent $\Leftrightarrow$ $\beta \sim \beta'$

2. Jones Polynomial via skein relation(Murasugi Chapter 11)



D_+ $\qquad$ D_0 $\qquad$ D_-

Def. Jones Polynomial

(1) K : trivial knot $\Rightarrow$ $V_K(t) = 1$

(2) $\dfrac{1}{t} V_{D+}(t) - t V_{D-}(t) = \left(\sqrt{t} - \dfrac{1}{\sqrt{t}}\right) V_{D_0}(t)$

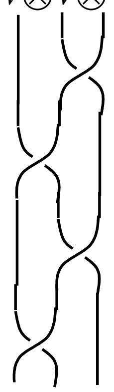
3. R-matrix and braid represenation

이제 braid로부터 knot invariant를 얻고자 한다. 이를 위해 먼저 braid를 vector space V (over complex number)의 operator로 해석하고자 한다.

R : $V \otimes V \to V \otimes V$을 생각하자. braid의 각 crossing에 대하여, 이것이 positive crossing이면 R을, negative crossing이면 R^{-1}을 대응시킨다. 그러면 B_n의 원소는 자연스

럽게 $V\otimes\cdots\otimes V=V^{(n)}$의 operator로 해석할 수 있다. 예를 들어 아래와 같은 braid는 다음과 같이 해석할 수 있다.

$$V\otimes V\otimes V$$



$$V\otimes V\otimes V$$

$$(Id_V\otimes R)\cdot(R\otimes Id_V)\cdot(Id_V\otimes R)\cdot(R\otimes Id_V) : V^{(3)} \to V^{(3)}$$

이와 같은 operator의 대응이 잘 정의되려면 braid group이 가지고 있는 두 개의 relations $\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$ if $|i-j|\geq 2$와 $\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i=\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1}$를 operator도 만족하고 있어야 한다. 이때 첫 번째 relation은 tensor의 성질에 의해 자연스럽게 만족된다. 하지만 두 번째 성질은 자연스럽게 성립하지 않으므로, 다음과 같은 정의를 도입하자.

Def. $(R\otimes Id_V)\cdot(Id_V\otimes R)\cdot(R\otimes Id_V)=(Id_V\otimes R)\cdot(R\otimes Id_V)\cdot(Id_V\otimes R)$을 Yang-Baxter equation이라 한다. 그리고 이 equation을 만족시키는 isomorphism $R : V\otimes V \to V\otimes V$을 R-matrix라 정의한다.

(예1) dim V=2일 때 $R=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\sqrt{t} & 0\\ 0 & -\sqrt{t} & 1-t & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$는 R-matrix가 된다. 또한

$R^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1-\frac{1}{t} & -\frac{1}{\sqrt{t}} & 0\\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{t}} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$이 성립한다.

이제 R-matrix가 주어져 있고, $\dim V=N$이라 하자. 그러면 $\beta\in B_n$는 operator로 해석할 수 있으므로, 그에 대응되는 행렬을 생각할 수 있다. 이때 β를 그 대응되는 행렬로 보내는 map을 $\psi : B_\infty \to \bigcup_{n=1}^{\infty} M(N^n, C)$와 같이 정의하자. 즉

$$R_i=\underbrace{I\otimes\cdots\otimes I}_{i-1\text{개}}\otimes R\otimes\underbrace{I\otimes\cdots\otimes I}_{n-i-1\text{개}}$$

라 두면

$$\psi(\sigma_{i_1}^{\ j_1}\sigma_{i_2}^{\ j_2}\cdots\sigma_{i_k}^{\ j_k})=R_{i_1}^{\ j_1}R_{i_2}^{\ j_2}\cdots R_{i_k}^{\ j_k}$$

와 같이 ψ를 정의한다. 그러면 ψ는 group homomorphism이 된다.

braid의 represenation을 얻었으므로, 이제는 이로부터 knot invariant를 얻는 방법에 대해 생각해보자. braid로부터 knot invariant를 정의하려면 Markov move (M1), (M2)에 의해 변하지 않는 값을 찾아야 한다. 특별히 (M1)에 주목하면 matrix의 trace가 이 조건을 만족한다. 하지만 trace는 (M2)를 만족하지 않으므로, trace와 비슷한 성질을 가진 함수를 찾아야 한다. 이것을 위해 Markov trace를 다음 절에서 정의하겠다.

<u>4. Markov trace and knot invariant</u>(Wadati, M.,Akutsu, Y., Deguchi, T.)

K를 적절한 ring (over C)라 두자. 함수 $\phi : B_\infty \rightarrow K$가 $\beta,\ \gamma\in B_n\subset B_\infty$에 대하여 $\phi(\beta\gamma)=\phi(\gamma\beta)$를 만족하고,

$$\phi(\beta\sigma_n)=\tau\phi(\beta),\quad \phi(\beta\sigma_n^{-1})=\bar{\tau}\phi(\beta)$$

를 만족시키는 $\tau,\ \bar{\tau}$를 찾을 수 있다고 가정하자. 그러면

$$\alpha(\beta)=(\tau\bar{\tau})^{-\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)^{\frac{w(\beta)}{2}}\phi(\beta)\ \text{(단, } w(\beta)\text{는 writhe number이다)}$$

라 정의했을때, α로부터 knot invariant를 얻을 수 있다. 그리고 이때 ϕ를 Markov trace라 정의한다.

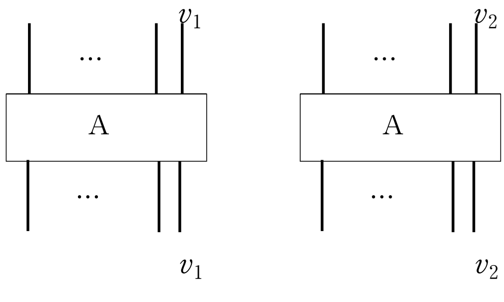
그러면 ϕ를 어떻게 정의할 것인가? 일반적으로 적절한 크기의 diagonal matrix μ에 대하여 $\phi(\beta)=trace(\psi(\beta)\mu)$와 같이 정의한다. 그러면 μ는 어떻게 구해야 하는가? 이를 위해 먼저 $\psi(\beta)=A,\ \psi(\sigma_n)=G_n$이라 두고, $trace(A)$와 $trace(AG_n)$, $trace(AG_n^{-1})$ 사이의 관계식을 구하자.

일반적인 경우는 계산이 복잡하기 때문에 먼저 $\dim V=2$인 경우를 먼저 살펴보자.

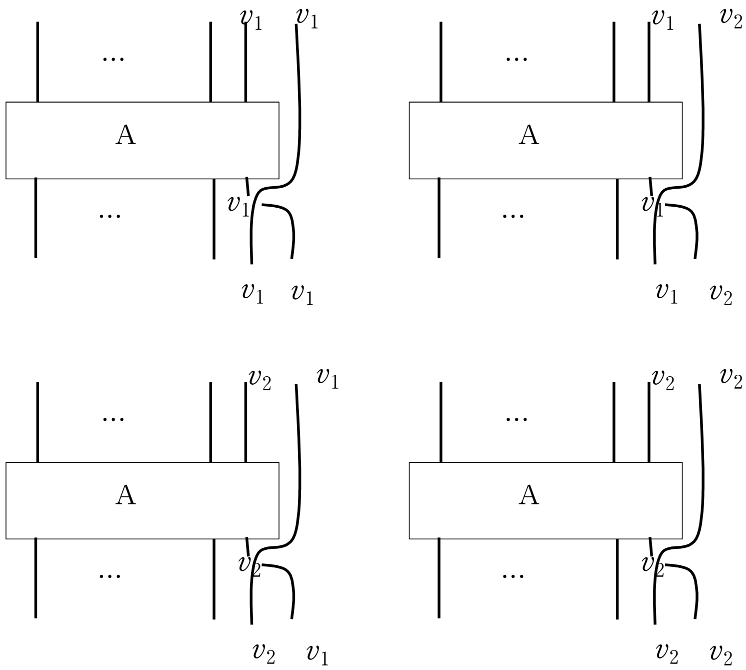
편의상 basis of $V=\{v_1,\ v_2\}$라 두고,

$$A(v_{i_1}\otimes v_{i_2}\otimes\cdots\otimes v_{i_n})=\sum_{j_1,j_2,\ldots,j_n} f_{i_1,i_2,\ldots,i_n}^{j_1,j_2,\ldots,j_n} v_{j_1}\otimes v_{j_2}\otimes\cdots\otimes v_{j_n},\quad R(v_{i_1}\otimes v_{i_2})=\sum_{j_1,j_2} R_{i_1,i_2}^{j_1,j_2} v_{j_1}\otimes v_{j_2}$$

와 같이 두자. (단 $i_1+i_2=j_1+j_2$) 그러면 $trace(A)=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n} f_{i_1,i_2,\ldots,i_n}^{i_1,i_2,\ldots,i_n}$가 된다.



$P=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}} f_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},1}^{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},1}$, $Q=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}} f_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},2}^{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},2}$와 같이 정의하자. 그러면 $trace(A)=P+Q$가 된다.



그러면

$$trace(AG_n)=(R_{1,1}^{1,1}+R_{1,2}^{1,2})P+(R_{2,1}^{2,1}+R_{2,2}^{2,2})Q$$

가 성립한다. 이제 R을 위의 (예1)에서 나온 것으로 정의하자. 즉

$$R=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&-\sqrt{t}&0\\0&-\sqrt{t}&1-t&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}R_{1,1}^{1,1}&0&0&0\\0&R_{1,2}^{1,2}&R_{1,2}^{2,1}&0\\0&R_{2,1}^{1,2}&R_{2,1}^{2,1}&0\\0&0&0&R_{2,2}^{2,2}\end{bmatrix}$$

와 같이 두면

$$trace(AG_n)=P+(1-t)Q+Q$$

가 성립한다. 마찬가지 방법으로 계산하면

$$trace(AG_n^{-1})=P+(1-\frac{1}{t})P+Q$$

를 얻는다. 여기에서 임의의 $P,\ Q$에 대하여

$$trace(AG_n)=\tau trace(A),\quad trace(AG_n{}^{-1})=\bar{\tau} trace(A)$$

를 만족시키는 $\tau,\ \bar{\tau}$이 존재하지 않음에 주목하라.

이제

$$\mu=\begin{pmatrix}f&0\\0&g\end{pmatrix},\quad \mu^{(n)}=\underbrace{\mu\otimes\cdots\otimes\mu}_{n\text{개}}$$

라 두고,

$$\phi(\beta)=trace(\psi(\beta)\mu^{(n)})=trace(A\mu^{(n)})$$

라 정의하자. 그리고 위에서 $trace(A)=P+Q$라 정의한 것과 같은 방법으로 $\phi(A)=P'+Q'$ 이라 정의하자.[1] 그러면

$$\phi(\beta\sigma_n)=(fR_{1,1}^{1,1}+gR_{1,2}^{1,2})P'+(fR_{2,1}^{2,1}+gR_{2,2}^{2,2})Q'=fP'+f(1-t)Q'+gQ'$$

가 성립한다. 여기에서 $f=1$, $g=t$라 정의하면 $\phi(\beta\sigma_n)=\phi(\beta)$가 성립한다. 마찬가지 방법으로 계산하면 $\phi(\beta\sigma_n^{-1})=t\phi(\beta)$을 얻는다. 그러므로 $\tau=1$, $\bar{\tau}=t$라 정의하면 $\alpha(\beta)=(\tau\bar{\tau})^{-\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)^{\frac{w(\beta)}{2}}\phi(\beta)=t^{\frac{w(\beta)-n+1}{2}}\phi(\beta)$는 knot invariant가 된다. 이 invariant가 Jones polynomial과 본질적으로 같음을 다음 절에서 증명하겠다.

5. Jones polynomial via R-matrix

위에서 사용한 R-matrix의 minimal polynomial을 구해보자.

$$det(R-\lambda I)=(\lambda-1)^3(\lambda+t)$$

이므로 R의 minimal polynomial은 $(x-1)(x+t)=x^2+(t-1)x-t$가 된다. 즉

$$R^2+(t-1)R-tI=0$$

을 얻는다. 이때 R은 invertible이므로 양변에 R^{-1}을 곱하면

$$R-tR^{-1}=(1-t)I$$

을 얻는다. 여기에서 α로부터 얻어지는 knot invariant에 대한 skein relation을 얻으려면, 위 식의 R을 $\left(\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)^{-\frac{1}{2}}\alpha_{D+}(t)$로, R^{-1}을 $\left(\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}\alpha_{D-}(t)$로, I를 $\alpha_{D_0}(t)$로 바꾸면 된다. 그런데 $\left(\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)^{\frac{1}{2}}=\sqrt{t}$이므로, 위의 knot invariant는 아래와 같은 skein relation을 만족한다.

$$\frac{1}{\sqrt{t}}\alpha_{D+}(t)-\sqrt{t}\,t\alpha_{D-}(t)=(1-t)\alpha_{D0}$$

양변을 $\sqrt{t}$로 나누면 $\frac{1}{t}\alpha_{D+}(t)-t\alpha_{D-}(t)=-\left(\sqrt{t}-\frac{1}{\sqrt{t}}\right)\alpha_{D_0}$를 얻는다. 이때 임의의 knot K와 trivial knot O에 대하여 $\alpha'(K)=(-1)^{l-1}\frac{\alpha(K)}{\alpha(O)}$(단 l은 K의 component의 개수)와 같이 정의하면, $\alpha'(t)$는 Jones Polynomial의 Skein relation을 만족하게 된다.

6. Application to obtain HOMPLY polynomial(Jones)

위와 같은 방법으로 knot invariant를 얻는 과정은 braid를 행렬이 아닌 다른 대상으로 represent해서도 적용될 수 있다. 그 좋은 예를 살펴보기 위해서 Jones의 논문 Hecke algebra representations of braid groups and links polynomial의 내용을 잠시 살펴보자.

---

1) i_1, $\cdots$, i_{n-1} 중에서 1의 개수를 k, 2의 개수를 l이라 두자. (여기에서 k, l은 i_1, $\cdots$, i_{n-1}의 함수이며, $k+l=n-1$이다.) 이때

$$P'=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}} f_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},1}^{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},1}f^{k+1}g^l,\ \ Q'=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1}} f_{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},2}^{i_1,i_2,\ldots,i_{n-1},2}f^kg^{l+1}$$

와 같이 정의한다.

Def. Hecke algebra $H(q,\ n)=\left\langle g_1,\ g_2,\ \cdots,\ g_{n-1}\ \middle|\ \begin{array}{l} g_ig_j=g_jg_i \text{ if } |i-j|\geq 2 \\ g_ig_{i+1}g_i=g_{i+1}g_ig_{i+1} \\ g_i^2=(q-1)g_i+q \end{array} \right\rangle$

위의 정의에 의하면 braid group은 Hecke algebra에 자연스럽게 represent된다. 그런데 Hecke algebra는 아래와 같은 Ocneanu's Trace라는 함수를 가지고 있다.

Thm. 임의의 복소수 z에 대하여 다음 세 가지 조건을 만족시키는 linear map $tr: \bigcup_{n=1}^{\infty} H(q,\ n) \to C$가 유일하게 존재한다. (이것을 Ocneanu's Trace라 부른다)

1) $tr(ab)=tr(ba)$

2) $tr(1)=1$

3) $tr(xg_n)=ztr(x)$ for $x\in H(q,\ n)$

여기서 특별히 $g_n=(q-1)+qg_n^{-1}$로부터 $xg_n^{-1}=\dfrac{1}{q}xg_n-\dfrac{q-1}{q}x$를 얻고, 3)으로부터

$$tr(xg_n^{-1})=\frac{z-q+1}{q}tr(x) \text{ for } x\in H(q,\ n)$$

를 얻음에 주목하자. 그러므로 $\tau=z,\ \bar{\tau}=\dfrac{z-q+1}{q}$라 정의하면 tr는 Markov trace가 된다. 여기에서 $\psi: B_\infty \to \bigcup_{n=1}^{\infty} H(q,\ n)$을 자연스러운 represenation이라 두면

$$\alpha(\beta)=(\tau\bar{\tau})^{-\frac{n-1}{2}}\left(\frac{\bar{\tau}}{\tau}\right)^{\frac{w(\beta)}{2}}tr(\psi(\beta))=\left(\frac{z(z-q+1)}{q}\right)^{-\frac{n-1}{2}}\left(\frac{z-q+1}{zq}\right)^{\frac{w(\beta)}{2}}tr(\psi(\beta))$$

는 knot invariant를 유도하게 된다. 이때 $\lambda=\dfrac{z-q+1}{zq}$이라 정의하면

$$\alpha(\beta)=\left(-\frac{1-\lambda q}{\sqrt{\lambda}(1-q)}\right)^{n-1}(\sqrt{\lambda})^{w(\beta)}tr(\psi(\beta))$$

를 얻게 되어, Jones 논문에서와 같은 결과를 얻게 된다. 그렇기 때문에 $\alpha(\beta)$는 HOMPLY polynomial과 본질적으로 같다.

7. Enhanced Yang-Baxter equation(Turaev)

앞의 4절에서 우리는 Yang-Baxter equation을 만족하는 행렬을 R-matrix라 정의했었다. 하지만 임의의 R-matrix에 대해 항상 knot invariant를 유도할 수 있는 것은 아니다. 그렇기 때문에 여기에서는 knot invariant를 얻기 위해서 R-matrix가 반드시 지녀야 하는 성질들을 살펴보고자 한다. 먼저 $\dim V=N$이라 두자.

$$\begin{array}{cccc} f: & V^{(n)} & \to & V^{(n)} \\ & v_{i_1}\otimes v_{i_2}\otimes\cdots\otimes v_{i_n} & \mapsto & \displaystyle\sum_{j_1,j_2,\cdots,j_n}^{N} f_{i_1,i_2,\cdots,i_n}^{j_1,j_2,\cdots,j_n} v_{j_1}\otimes v_{j_2}\otimes\cdots\otimes v_{j_n} \end{array}$$

에 대하여 $Sp_n(f): V^{(n-1)} \to V^{(n-1)}$를 아래와 같이 정의하자.

$$Sp_n(f)(v_{i_1}\otimes v_{i_2}\otimes\cdots\otimes v_{i_{n-1}})=\sum_{j_1,\cdots,j_{n-1},j} f^{j_1,j_2,\cdots,j_{n-1},j}_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},j}\, v_{j_1}\otimes v_{j_2}\otimes\cdots\otimes v_{j_{n-1}}$$

예를 들어 $N=2$, $n=2$인 경우를 살펴보자. 만일 $f=\begin{bmatrix} f^{1,1}_{1,1} & f^{1,2}_{1,1} & f^{2,1}_{1,1} & f^{2,2}_{1,1} \\ f^{1,1}_{1,2} & f^{1,2}_{1,2} & f^{2,1}_{1,2} & f^{2,2}_{1,2} \\ f^{1,1}_{2,1} & f^{1,2}_{2,1} & f^{2,1}_{2,1} & f^{2,2}_{2,1} \\ f^{1,1}_{2,2} & f^{1,2}_{2,2} & f^{2,1}_{2,2} & f^{2,2}_{2,2} \end{bmatrix}$이라 두면

$$\begin{cases} Sp_2(f)(v_1)=\sum_{j_1,j} f^{j_1,j}_{1,j} v_{j_1}=(f^{1,1}_{1,1}+f^{1,2}_{1,2})v_1+(f^{2,1}_{1,1}+f^{2,2}_{1,2})v_2 \\ Sp_2(f)(v_2)=\sum_{j_1,j} f^{j_1,j}_{2,j} v_{j_1}=(f^{1,1}_{2,1}+f^{1,2}_{2,2})v_1+(f^{2,1}_{2,1}+f^{2,2}_{2,2})v_2 \end{cases}$$

가 성립하므로

$$Sp_2(f)=\begin{bmatrix} f^{1,1}_{1,1}+f^{1,2}_{1,2} & f^{2,1}_{1,1}+f^{2,2}_{1,2} \\ f^{1,1}_{2,1}+f^{1,2}_{2,2} & f^{2,1}_{2,1}+f^{2,2}_{2,2} \end{bmatrix}$$

가 된다.

이제 enhanced Yang-Baxter operator(R, $\begin{matrix}\mu: & V\to V \\ & v_i\mapsto \mu_i v_i\end{matrix}$, α, $\beta\in C^*$)를 아래의 두 조건을 만족하는 순서쌍 $(R,\ \mu,\ \alpha,\ \beta)$으로 정의한다.

(1) $\mu\otimes\mu:\ V^{(2)}\to V^{(2)}$가 $(\mu\otimes\mu)\cdot R=R\cdot(\mu\otimes\mu)$를 만족한다

(2) $Sp_2(R\cdot(\mu\otimes\mu))=\alpha\beta\mu,\ \ Sp_2(R^{-1}\cdot(\mu\otimes\mu))=\alpha^{-1}\beta\mu$

이 조건들을 살펴보기에 앞서 먼저 위의 조건들과 동치인 조건들을 몇 개 살펴보자.

(1)` $(\mu_i\mu_j-\mu_k\mu_l)R^{k,l}_{i,j}=0$

(2)` $Sp_2(R^{\pm1}\cdot(Id_V\otimes\mu))=\alpha^{\pm1}\beta Id_V$

(2)`` $\sum_{j=1}^{N} R^{k,j}_{i,j}\mu_j=\alpha\beta\delta^k_i,\ \ \sum_{j=1}^{N}(R^{-1})^{k,j}_{i,j}\mu_j=\alpha^{-1}\beta\delta^k_i$

여기에서 $Sp(f)=Sp_1(Sp_2(\cdots(Sp_n(f))))$와 같이 정의하고, (사실 $Sp(f)=trace(f)$이다)

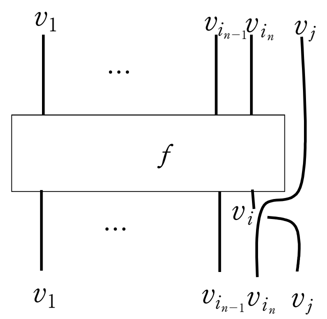
$$\phi(\xi)=Sp(\psi(\xi)\cdot\mu^{(n)})$$

라 정의하자. 그러면 위의 (1)번 조건은 앞의 4절에서의 $\phi(\beta\gamma)=\phi(\gamma\beta)$에 대응된다. (이것은 tensor의 성질에 의해 쉽게 증명된다) 이제 (2)번 조건이 τ, $\bar{\tau}$가 존재할 조건에 대응됨을 보이겠다.

먼저 $\psi(\xi)=f$라 두자. 그러면

$$\phi(\xi)=\sum_{i_1,\cdots,i_n} f^{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i_n}_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i_n}\mu_{i_1}\mu_{i_2}\cdots\mu_{i_n}=\sum_{i_1,\cdots,i_n,i} f^{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i}_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i_n}\delta^{i_n}_i\mu_{i_1}\mu_{i_2}\cdots\mu_{i_n}$$

가 성립한다. 이제 아래 그림을 참고하여 $\phi(\xi\sigma_n)$를 계산하면



$$\phi(\xi\sigma_n)=\sum_{i_1,\cdots,i_n,i,j} f^{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i}_{i_1,i_2,\cdots,i_{n-1},i_n} R^{i_n,j}_{i,j}\mu_{i_1}\mu_{i_2}\cdots\mu_{i_n}\mu_j$$

를 얻는다. 그러므로 $\tau=\alpha\beta$라 두고, 위의 식에서 $i_n=k$라 두면

$$\phi(\xi\sigma_n)=\tau\phi(\xi) \Leftarrow \sum_j R^{k,j}_{i,j}\mu_j=\alpha\beta\delta^k_i \text{ for all } \xi\in B_n$$

가 얻어진다. 마찬가지 방법으로 $\bar{\tau}=\alpha^{-1}\beta$라 두면 $\phi(\xi\sigma_n^{-1})=\bar{\tau}\phi(\xi) \Leftarrow \sum_j R^{k,j}_{i,j}\mu_j=\alpha^{-1}\beta\delta^k_i$임을 보일 수 있다.

이제 $\xi\in B_n$에 대하여

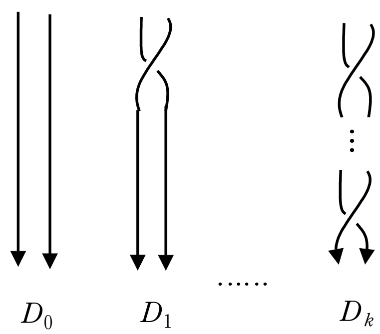
$$T_S(\xi)=\alpha^{-w(\xi)}\beta^{-n}Sp(\phi(\xi)\cdot\mu^{(n)})$$

라 정의하자. 그러면 $\forall\xi,\eta\in B_n$에 대하여

$$T_S(\eta^{-1}\xi\eta)=T_S(\xi\sigma_n)=T_S(\xi\sigma_n^{-1})=T_S(\xi)$$

가 성립한다. 그러므로 T_S는 knot invariant를 준다. 또한 R의 minimal polynomial을 $\sum_{i=1}^{k}a_i x^i$라 두면, T_S는 다음과 같은 skein relation을 만족한다.

$$\sum_{i=1}^{k}\alpha^i a_i T_S(D_i)=0$$



8. Example(Murasugi, example 12.3.3)

마지막으로 가장 중요한 enhanced Yang-Baxter operator의 예를 소개하면서 세미나를 마치고자 한다.

$\dim V=N(N\geq 2)$라 두자.

(1) $a+b\neq c+d$이면 $R^{c,d}_{a,b}=0$이다.

(2) $m=a+b=c+d$라 두자. 이때 $a-d=c-b<0$이면 $R^{c,d}_{a,b}=0$이다.

(3) $a-d=c-b\geq 0$인 경우를 생각하자. $k=a-d=c-b$라 두고, 자연수 n에 대하여 $(t:n)=(1-t)(1-t^2)\cdots(1-t^n)$와 같이 정의하자. 또한 $(t:0)=1$이라 두자. 이때 $R_{a,b}^{c,d}$를 다음과 같이 정의한다.

$$R_{a,b}^{c,d}=(-1)^{a+c}t^{-\frac{1}{2}(ab+cd+N(k-m+2)-(k+m))}\times$$
$$\left[\frac{(t:a-1)(t:N-d)}{(t:k)(t:d-1)(t:N-a)}\frac{(t:c-1)(t:N-b)}{(t:k)(t:b-1)(t:N-c)}\right]^{\frac{1}{2}}$$

그리고 $\mu_i=t^{i-1}$, $\alpha=t^{-\frac{N-1}{2}}$, $\beta=t^{\frac{N-1}{2}}$와 같이 정의하자. 그러면 (R,μ,α,β)는 enhanced Yang-Baxter equation이 된다. 실제로 이로부터 유도되는 knot invariant를 계산하면

$$\hat{J}_K^{(N)}(\xi)=\frac{\left(t^{\frac{N-1}{2}}\right)^{w(\xi)-n+1}tr(\psi(\xi)\mu^{\otimes n})}{1+t+\cdots+t^{N-1}}\quad \text{for}\quad \xi\in B_n$$

가 된다.