example

$\dim V = 2$, $R = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} & A-A^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix} = (A) \oplus \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A^{-1} & A-A^{-3} \end{pmatrix} \oplus (A)$, $n = (0 \quad A \quad -A^{-1} \quad 0) = (0) \oplus (A \quad -A^{-1}) \oplus (0)$

이라 두자. 그러면

$$R^{-1} = (A^{-1}) \oplus \begin{pmatrix} A^{-1}-A^{3} & A \\ A & 0 \end{pmatrix} \oplus (A^{-1}), \quad id = (1) \oplus (1) \text{ 이고,}$$

$n = (0 \quad A \quad -A^{-1} \quad 0)$로 부터 $\begin{pmatrix} 0 & A \\ -A^{-1} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -A \\ A^{-1} & 0 \end{pmatrix}$ 이므로

$u = \begin{pmatrix} 0 \\ -A \\ A^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$ 를 얻는다. 이제 위의 R과 n이 앞의 thm 의 조건을 만족시킴을 보이자.

$$id \otimes n = \big((1) \oplus (1)\big) \otimes \big((0) \oplus (A \quad -A^{-1}) \oplus (0)\big) = (0) \oplus (A \quad -A^{-1} \quad 0) \oplus (0 \quad A \quad -A^{-1}) \oplus (0)$$

$$R \otimes id = \left((A) \oplus \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A^{-1} & A-A^{-3} \end{pmatrix} \oplus (A)\right) \otimes \big((1) \oplus (1)\big)$$

$$= (A) \oplus \begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1} \\ 0 & A^{-1} & A-A^{-3} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} & 0 \\ A^{-1} & A-A^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & A \end{pmatrix} \oplus (A)$$

이므로,

$$(id \otimes n) \cdot (R \otimes id) = (0) \oplus (A^{2} \quad 0 \quad -A^{-2}) \oplus (1 \quad A^{2}-A^{-2} \quad -1) \oplus (0)$$

이 된다. 마찬가지로 계산하면

$$n \otimes id = (0) \oplus (0 \quad A \quad -A^{-1}) \oplus (A \quad -A^{-1} \quad 0) \oplus (0)$$

$$id \otimes R^{-1} = (A^{-1}) \oplus \begin{pmatrix} A^{-1}-A^{3} & A & 0 \\ A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1} \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & A^{-1}-A^{3} & A \\ 0 & A & 0 \end{pmatrix} \oplus (A^{-1})$$

이므로

$$(n \otimes id) \cdot (id \otimes R^{-1}) = (0) \oplus (A^{2} \quad 0 \quad -A^{-2}) \oplus (1 \quad A^{2}-A^{-2} \quad -1) \oplus (0)$$
$$= (id \otimes n) \cdot (R \otimes id)$$

가 성립한다.

마찬가지로 $(id\otimes n)(R^{-1}\otimes id) = (n\otimes id)\cdot(id\otimes R)$가 성립함도 보일 수 있다.
또한

$$n\cdot R = (0)\oplus(-A^{-2} \quad A^{-4})\oplus(0) = -A^{-3}\cdot n$$

이 성립하므로, $[D]$는 framed tangle invariant가 된다.

이제 $[D]$가 Kauffman bracket polynomial 이 됨을 보이자.

$$① \; A\cdot\left[\;)\;(\;\right] + A^{-1}\cdot\left[\;\asymp\;\right] = A\cdot id_{V\otimes V} + A^{-1}\cdot U\cdot n = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A^{-1} & 0 \\ 0 & A^{-1} & A-A^{-3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A \end{bmatrix}$$

$$= R = \left[\;\times\;\right]$$

$$② \; \left[\bigcirc \sqcup D\right] = \left[\bigcirc\right]\cdot[D] = n\cdot U\cdot[D] = (-A^2 - A^{-2})\cdot[D]$$

위의 ①, ② 에 의해 만일 D가 link의 diagram이었다면, $[D]$는 Kauffman bracket polynomial이 된다.

Note) 위의 R-matrix에 대하여, $n\cdot R = c\cdot n$ for some scalar c
를 만족시키는 n은 위의 것 이외에 하나 더 존재한다. 이것은

$$n = (0)\oplus(1 \quad A^2)\oplus(0)$$

인데, 이 새로운 n은 $(id\otimes n)(R\otimes id) = (n\otimes id)(id\otimes R^{-1})$을 만족시키지
않는다. 실제로 계산을 해보면

$$(id\otimes n)(R\otimes id) = (0)\oplus(A \quad 0 \quad A)\oplus(A^{-1} \quad A-A^{-3} \quad A^3)\oplus(0)$$

$$(n\otimes id)(id\otimes R^{-1}) = (0)\oplus(A \quad 0 \quad A)\oplus(A^{-1} \quad A-A^5 \quad A^3)\oplus(0)$$

가 된다.