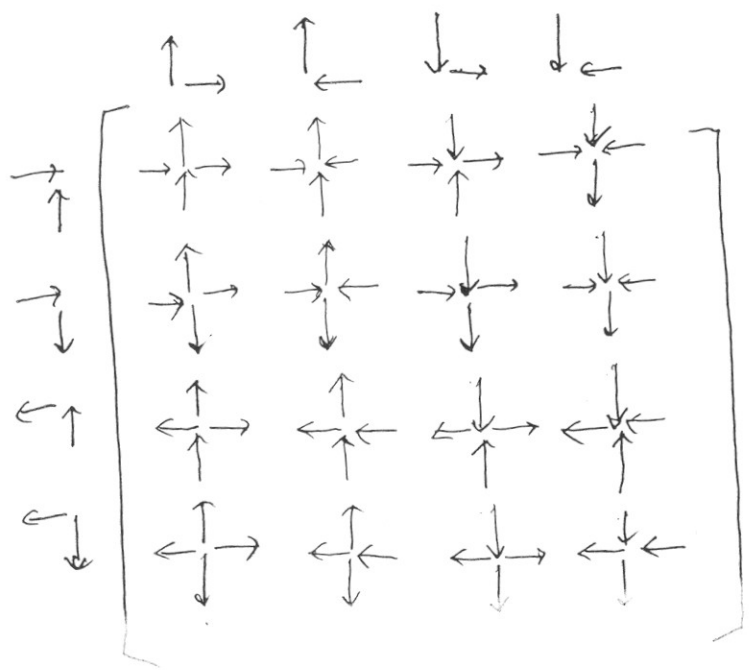


· 화살표 방향을 동시에 바꾸어 얻어진 경우에는 energy 가 동일한 것으로 간주하여 같은 weight 를 준다

$$w_j = \exp(-\epsilon_j/kT)$$

$$w_1 = w_2 (=a), \quad w_3 = w_4 (=b), \quad w_5 = w_6 (=c)$$



他方、これとは独立に Woronowicz は、作用素代数の立場から

$$\text{Fun}(G) \cdots \rightarrow \text{Fun}_q(G)$$

という変形を導入した ([4]). $\text{Fun}_q(G)$ は非可換環だからふつうの意味で underlying space を考えることはできないのだが、これを仮想的な「量子群」上の関数環と見立てて、非可換幾何学・調和解析を展開しようというもくろみである。

実は $U_q(\mathfrak{g})$ と $\text{Fun}_q(G)$ は、 $U(\mathfrak{g})$ と $\text{Fun}(G)$ のように互いに双対的になつていた、まったく別の動機・背景から本質的に同等の概念が導かれたわけだ、この事実は考察の対象の自然さを示唆しているとあるといえるかもしれない。現在研究されている量子群は、もっぱら $U_q(\mathfrak{g})$ または $\text{Fun}_q(G)$ の型のものである。

数学において「q アナログ」なる対象は有限体上の群の表現、組み合わせ論、特殊関数論などの分野で、これまでもしばしば考えられてきた。対称群の群環の q アナログ (§7) や、ガウスの超幾何関数の q アナログなどはその例である。 $U_q(\mathfrak{g})$, $\text{Fun}_q(G)$ とこれらとの関係も現在調べられつつある ([7, 8]). 本書では $U_q(\mathfrak{g})$ とその表現について解説する。

ヤン・バクスター方程式

本書で紹介するように、パラメータ q の一般の値については、 $U_q(\mathfrak{g})$ の表現論は「古典極限」である $U(\mathfrak{g})$ のそれとまったく並行した形で展開することができ。しかし、次の2点で古典論とは違った側面が現れてくる。

- (i) q の特殊値 (1 の巾根, $q^{\pm 1} \rightarrow 0$)
 - (ii) テンソル表現
- (i) については §9 で q が 1 の巾根の場合にふれる。 $q^{\pm 1} \rightarrow 0$ については文献 25, 26 を参照。 (ii) について一言述べておこう。

ホップ代数 A の表現 (π, V) とは、代数としての表現、すなわちベクトル空間 V と代数射 $\pi: A \rightarrow \text{End}(V)$ の組のことである。 A には余積 Δ があるので、2 つの表現 (π, V) ($i=1, 2$) に対し

$$A \rightrightarrows A \otimes A \xrightarrow{\text{antipode}} \text{End}(V_1 \otimes V_2)$$

の合成によって自然にテンソル積表現 $((\pi \otimes \pi_2) \circ \Delta, V_1 \otimes V_2)$ が考えられる。このとき $V_1 \otimes V_2$ と $V_2 \otimes V_1$ は同型になるだろうか。 A が余可換ならば、intertwiner (A の作用と可換な同型射)

$$R_{V_1 V_2}: V_1 \otimes V_2 \xrightarrow{\sim} V_2 \otimes V_1$$

として $R_{V_1 V_2} = \tau: x \otimes y \mapsto y \otimes x$ が存在する。余可換でない A については intertwiner の存在は一般に保証されない。

$A = U_q(\mathfrak{g})$ の場合には (q が一般の値なら) 自明でない intertwiner が存在することがわかる。さらに $V_1 \otimes V_2 \otimes V_3$ と $V_3 \otimes V_2 \otimes V_1$ とをつなぐ自然に作られた 2 通りの intertwiner が一致する:

$$\begin{aligned} (R_{V_1 V_2} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes R_{V_2 V_3})(R_{V_1 V_3} \otimes \text{id}) \\ = (\text{id} \otimes R_{V_2 V_3})(R_{V_1 V_2} \otimes \text{id})(\text{id} \otimes R_{V_1 V_3}). \end{aligned}$$

これをヤン・バクスター方程式とよぶ¹⁾。

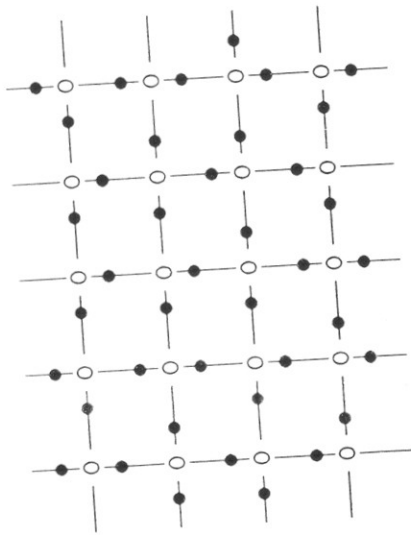
ヤン・バクスター方程式は、因子化 S 行列や統計力学・場の量子論の可解模型などにおいて、可解性の根拠となる重要な役割を果たしている。さらにトポロジーにおける絡み目の不変量や、2 次元の共形場理論などとも関係があることがわかってきた [15, 16]。本書の後半で、量子群の立場からヤン・バクスター方程式について解説する。

可解格子模型

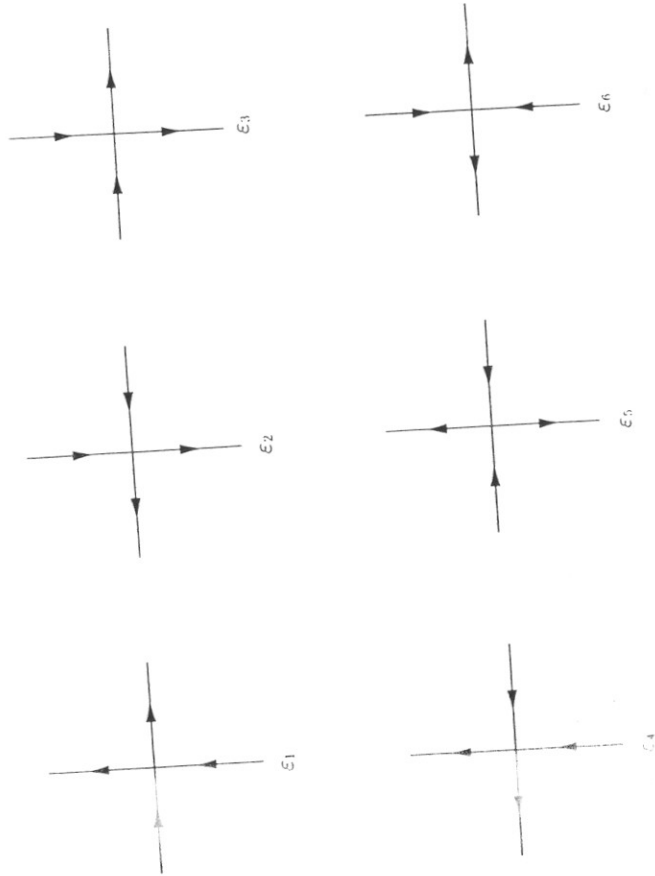
本文では述べる余裕がないので、最後に可解格子模型とヤン・バクスター方程式の関係について、その入口だけふれておこう。

次のような 2 次元の結晶格子を考えよう。格子点には酸素原子 O、各辺には水素イオン H をおく。さらに各 O 原子に対し 2 個の H が近くに、2 個の H が遠くに位置するとする (ice condition)。

¹⁾ 本来のヤン・バクスター方程式は、後述(0.3)のように R 自身がパラメータを含む関数方程式である。



H イオンが、右(または左, 上, 下)の O 原子に近接しているときその状態を O 原子に向う矢印によって表すことにしよう。すると格子点のまわりの ice condition をみたく配置は、次の 6通りである。



それぞれの配置にエネルギー ϵ_j ($j=1, \dots, 6$) を与え、ボルツマン・ウェイトを $\omega_j = \exp(-\epsilon_j/kT)$ で定める。物理的な説明は略すが、 k はボルツマン定数、 T は絶対温度である。格子上に矢印を書き込む可能な並べ方をまた「配置」という。各配置に統計的重み (確率測度)

$$\frac{1}{Z} \prod_{\text{頂点}} \omega_i$$

を与えることによって統計力学の模型が定まる。これを 6 vertex model とよぶ。

規格化定数

$$Z = \sum_{\text{配置}} \prod_{\text{頂点}} \omega_i$$

は分配関数とよばれ、重要な物理量である。格子サイズ $N \rightarrow \infty$ となるとき自身は有限量の N 乗で大きくなる。このとき

$$f = -kT \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \log Z \quad (N: \text{格子点の数})$$

(格子点ごとの) 自由エネルギーとよぶ。さて、 $\omega_1 = \omega_2 (=a)$, $\omega_3 = \omega_4 (=b)$, $\omega_5 = \omega_6 (=c)$ と仮定して、ボルツマン・ウェイトを次のようにパラメトライズしよう:

$$a = \frac{qx^{-1} - q^{-1}x}{q - q^{-1}}, \quad b = \frac{x - x^{-1}}{q - q^{-1}}, \quad c = 1 \quad (0.2)$$

このとき f は閉じた形に求められる (Baxter [14] 参照):
領域 $0 < q < x < 1$:

$$-\frac{1}{kT} f = \log(ax) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{x^m - x^{-m}}{m(q^m - q^{-m})}$$

$$\text{領域 } |q| = |x| = 1: q = e^{iu}, \quad x = e^{iv}, \quad 0 < u < \mu \text{ とおくと}$$

$$-\frac{1}{kT} f = \log b + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sinh 2ut \sinh(\pi - \mu)t}{2 \sinh \pi t \cosh \mu t} \frac{dt}{t}$$

格子模型が「可解」ということの数学的定義はないが、おおよそ上のような意味

で 6 vertex model は可解な格子模型である。さて、ボルツマン・ウェイトを表に並べると 4×4 行列ができる：

$$R = \begin{bmatrix} a & & & \\ & c & b & \\ & b & c & \\ & & & a \end{bmatrix} \in \text{End}(C^2 \otimes C^2)$$

ここで(0.2)において q を固定し、 $R = R(x)$ を x の関数とみたとき、次のヤン・バクスター方程式が成り立つ。

$$(R(x) \otimes 1)(1 \otimes R(xy))(R(y) \otimes 1) = (1 \otimes R(y))(R(xy) \otimes 1)(1 \otimes R(x)) \quad (0.3)$$

上述のような exact な計算のできた代数的根拠は、実はボルツマン・ウェイトがヤン・バクスター方程式をみたすことにある。標語的にいえば、ヤン・バクスター方程式の解ごとに、その行列要素をボルツマン・ウェイトとして可解な格子模型を作ることができるのである。

本書の構成

§1 ではホップ代数の基本概念について簡単に準備する。§2-4 はもともと基本的な量子群 $U_q(\mathfrak{sl}(2, C))$ について定義とその有限次元表現論 (q が 1 の中根でないとき) を述べる。内容的には標準的なリー環 $\mathfrak{sl}(2, C)$ の表現論を少し違ったことばで展開したもの、といってよいだろう。

一般の場合の $U_q(\mathfrak{sl})$ の定義は §6 で述べるが、その準備として §5 で単純リー環とカッツ・ムーンディーリー環の定義を述べ、§6 の動機づけとした。§6 ではまた $U_q(\mathfrak{sl})$ の表現論の概略の結果のみを与える。§7 で 2, 3 の実例を述べ、ヘッケ環の表現に言及する。§8 では $GL(n, C)$ と対称群に関する古典的な Schur の相互律とその q アナログについて述べる。§9 は Lusztig による q が 1 の中根の場合の最高ウェイト表現論を $U_q(\mathfrak{sl}(2, C))$ に即して紹介する。

§10 からはヤン・バクスター方程式の解説である。§10 で設定とヤン・バクスター方程式の解の実例を与える。また Drinfeld の普遍 R 行列について少し

ふれた。アフィン・リー環 $\hat{\mathfrak{sl}}$ に付随する $U_q(\hat{\mathfrak{sl}})$ の有限次元表現からいわゆる三角関数型の解が系統的に作られる。§11 では $U_q(\hat{\mathfrak{sl}}(2, C))$ についてその構成を与える。§12 はヤン・バクスター方程式のパリアントである face 模型について、§11 の解から出発する Pasquier の構成を述べる。最後に restricted 模型についてもふれた。

予備知識について

本書を読むための予備知識としては、線型代数学に加えて少しだけ初等代数学を必要とする。といっても群・環・イデアル・加群の定義程度であって、数学科 3 年次前期に講義される内容で十分である。線型代数学では双対空間、空間、Hom などの他、特にベクトル空間のテンソル積およびテンソル代数を頻繁に用いるので、慣れない読者は代数学の教科書の該当部分に目を通しておかれるとよい (たとえば横沼健雄著『テンソル積と外積代数』岩波基礎数学、第 1 章および §2.4)。この他 §8 と §9 の一部で環上の加群のテンソル積を用いている。また §8 では半単純代数の知識を証明なしに引用したが、これについてはそこにあげた参考書を見ていただきたい。§10 には 1 カ所だけ複素関数論が使われている。

本書から進んで勉強したい読者のために、あとがきにおいて関連する話題と参考文献をあげておいた。

98 §10 ヤン・バクスター方程式
 とする。ここで $R(u, u')$ は $\text{End}_C(V \otimes V)$ の元である。このとき (10.4) は自明に成立する。いま V の基底をとって

$$R(u, u') = \sum R_{ij}(u, u') E_{ij} \otimes E_{ij} \quad (10.6)$$

と行列表示しよう。すると (10.3) は n^4 個 ($n = \dim V$) の行列要素 $R(u, u')$ に対する未知関数とする、 n^6 個の関数方程式である。通常は (10.5) の形の R に対する、さ (10.3) をヤン・バクスター方程式、その解 $R(u, u')$ を R 行列とよんでいる。さらに、大抵の場合スベクトル・パラメータは C を動くものとし、かつ R 行列は

$$R(u, u') = R(u - u') \quad u, u' \in C \quad (10.7)$$

$$\begin{aligned} &\text{となることも想定する。このときは (10.3) は} \\ &(R(u) \otimes 1)(1 \otimes R(u+v))(R(v) \otimes 1) \\ &= (1 \otimes R(v))(R(u+v) \otimes 1)(1 \otimes R(u)) \end{aligned} \quad (10.8)$$

となる。なお (10.5) の形でない R 行列は §12 に出てくる。

注意 10.2 文獻によつて、この R を \check{R} と書いているものも多い。成分の互換 $P: x \otimes y \rightarrow y \otimes x$ を用いて

$$R(u) = P \check{R}(u) \in \text{End}_C(V \otimes V) \quad (10.9)$$

とおくと、ヤン・バクスター方程式は $R_{12}(u)R_{13}(u+v)R_{23}(v) = R_{23}(v)R_{13}(u+v)R_{12}(u)$ の形をとる。ただし、 $R_{ij}(u) \in \text{End}_C(V^{\otimes 3})$ は第 (i, j) 成分に $R(u)$ で、残りの成分に恒等写像 (動く行列を表す。どちらの表示を用いているか、混乱しないように注意を要する。

解の実例

典型的な例をいくつかあげよう。

例 10.3

$$A = C \otimes_n, R_i(u) = 1 + us_i$$

ただし $s_i = (i \ i+1)$ は互換 ($1 \leq i \leq n-1$)。ヤン・バクスター方程式は、群環 A における次の恒等式に帰する。

$$\begin{aligned} &(1 + us_i)(1 + (u+v)s_{i+1})(1 + vs_i) \\ &= (1 + vs_{i+1})(1 + (u+v)s_i)(1 + us_{i+1}) \end{aligned}$$

この両辺は u の 2 次式だから、等式の成立をチェックするには次の 3 点で見ればよい。

- $u=0$: 自明
- $u=-v$: $(1 - vs_i)(1 + vs_i) = (1 + vs_{i+1})(1 - vs_{i+1})$
- $u=\infty$: $s_i s_{i+1} (1 + vs_i) = (1 + vs_{i+1}) s_i s_{i+1}$

最後の式は互換 s_i の組紐関係式に帰着する。

例 10.4

$$A = H_n(q), R_i(u) = \frac{q^u g_i - q^{-u} g_i^{-1}}{q - q^{-1}} = [u]g_i + q^{-u}$$

ヘッケ環の中のヤン・バクスター方程式の成立を確認してみよう。例 10.3 と同様、(10.9) の両辺は適当に因子を払うと q^{2u} についての 2 次式になるので、次の 3 点でチェックすればよい。

- $q^{2u} = 1$: 自明
- $q^{2u} = q^{-2v}$: $(q^{-v} - [v]g_i)(q^{-v} + [v]g_i) = (q^{-v} + [v]g_{i+1})(q^{-v} - [v]g_{i+1})$
- $q^{2u} = \infty$: $g_i g_{i+1} (q^{-v} + [v]g_i) = (q^{-v} + [v]g_{i+1}) g_i g_{i+1}$

第 2, 3 式はそれぞれヘッケ環の定義関係式 (7.6), (7.7) に帰着する。

上で述べた例において、代数 A の行列表現 ρ をとればヤン・バクスター方程式の行列解が待られる。

例 10.3'

$$V = C^n, \rho: C \otimes_n \rightarrow \text{End}_C(V^{\otimes n})$$

$$s_i \mapsto 1 \otimes \cdots \otimes P \otimes \cdots \otimes 1$$

ここに $Px \otimes y = y \otimes x$ 。たとえば $n=2$ のとき

$$R(u) = 1 + uP = \begin{bmatrix} 1+u & & & \\ & 1 & u & \\ & u & 1 & \\ & & & 1+u \end{bmatrix}$$

100 §10 ヤン・バクスター方程式

例 10.4' V は上と同じとし,

$$\rho: H_n(q) \rightarrow \text{End}_C(V^{\otimes n})$$

$$g_i \mapsto 1 \otimes \dots \otimes T \otimes \dots \otimes 1$$

行列 T は (7.2) で定義したものとす。 $n=2$ ならば

$$R(u) = \frac{q^u T - q^{-u} T^{-1}}{q - q^{-1}} = \begin{bmatrix} [1+u] & & & \\ & q^u & [u] & \\ & [u] & q^u & \\ & & & [1+u] \end{bmatrix} \quad (10.10)$$

となる。

もう少し高級な例をあげる。

例 10.5 $V = C^2$ とし,

$$R(u) = \begin{bmatrix} a(u) & & & d(u) \\ & c(u) & b(u) & \\ & b(u) & c(u) & \\ & & & a(u) \end{bmatrix}$$

ここに

$$\begin{aligned} a(u) &= \theta_0(\eta) \theta_0(u) \theta_1(\eta + u) \\ b(u) &= \theta_0(\eta) \theta_1(u) \theta_0(\eta + u) \\ c(u) &= \theta_1(\eta) \theta_0(u) \theta_0(\eta + u) \\ d(u) &= \theta_1(\eta) \theta_1(u) \theta_1(\eta + u) \end{aligned}$$

η は任意定数, また θ_0, θ_1 は楕円テータ関数

$$\begin{aligned} \theta_0(u) &= \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2p^{2n-1} \cos 2\pi u + p^{4n-2})(1 - p^{4n}) \\ \theta_1(u) &= 2p^{1/4} \sin \pi u \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2p^{2n} \cos 2\pi u + p^{4n})(1 - p^{2n}) \end{aligned} \quad (10.11)$$

例 10.5 について, ヤン・バクスター方程式を確かめてみよう。まずテータ関数の次の性質に注意する。以下 $p = e^{\pi i \tau}, \text{Im } \tau > 0$ とおく。

$$\begin{aligned} \theta_0(u), \theta_1(u) &\text{ は } \text{Im } \tau > 0 \text{ で絶対収束して } u \text{ の整関数} \\ \theta_0(u+1) &= \theta_0(-u), \quad \theta_1(u+1) = -\theta_1(u) = \theta_1(-u) \\ \theta_j(u+\tau) &= -e^{-\pi i \tau - 2\pi i u} \theta_j(u) \quad (j=0, 1) \\ \theta_j(u + \frac{\tau}{2}) &= i e^{-\frac{\pi i \tau}{4} - \pi i u} \theta_{j+1}(u) \quad (j=0, 1) \end{aligned} \quad (10.12)$$

ただし $\theta_2(u) = \theta_0(u)$ 。これらの式から
 $-R(u+1) = (g \otimes I) R(u) (I \otimes g)^{-1}$
 $-\xi_1 R(u + \frac{\tau}{2}) = (h \otimes I) R(u) (I \otimes h)^{-1}$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, h = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \xi_1 = \exp\left[\frac{\pi i \tau}{2} + 2\pi i\left(u + \frac{\tau}{2}\right)\right]$$

がわかる。いま (10.8) 式の (左辺) - (右辺) を $F(u)$ と書こう。このとき, 上式

$$F(u+1) = (g \otimes I \otimes I) F(u) (I \otimes I \otimes g)^{-1} \quad (10.13)$$

$$\xi_2 F(u + \frac{\tau}{2}) = (h \otimes I \otimes I) F(u) (I \otimes I \otimes h)^{-1}$$

$$\xi_3 F(u + \tau) = F(u)$$

$$\xi_2 = \exp[\pi i \tau + 2\pi i(2u + v + \eta)], \quad \xi_3 = \exp[4\pi i \tau + 2\pi i(4u + 2v + 2\eta)]$$

が従う。次の補題が基本的である:

補題 10.6 $\text{Im } \tau > 0$ とす。整関数 $f(u) \equiv 0$ と $A_1, A_2, B \in C$ に対し

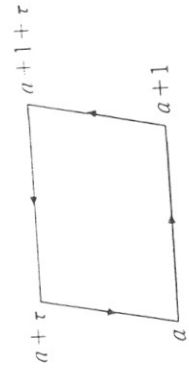
$$f(u+1) = e^{-2\pi i B} f(u), \quad f(u+\tau) = e^{-2\pi i(A_1+A_2u)} f(u)$$

が成り立つならば, $A_2 \in \mathbb{Z}_{\neq 0}$ であり, かつ $f(u)$ は $\text{mod } \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau$ で A_2 個の零点

$$u_1, \dots, u_{A_2} \text{ をもつ。さらに } u_1 + \dots + u_{A_2} \equiv B\tau + \frac{1}{2}A_2 - A_1 \text{ mod } \mathbb{Z} + \mathbb{Z}\tau.$$

(証明) 図のような周期平行四辺形 C を, その辺上 $f(u)$ の零点がないように

選ぶ。



コーシーの積分定理から

$$\int_C \frac{f(u)}{f(u)} \frac{du}{2\pi i} = C \text{ 内の } f(u) \text{ の零点の数 (重複度を込めて)}$$

であるが, 仮定を用いると

ボルツマン定数とは

ボルツマン定数 k は、気体定数 R をアボガドロ定数 N_A で割った量、

$$k = \frac{R}{N_A}$$

で定義される定数です。つまり、 k とは原子あるいは分子一個あたりの絶対気体定数を表しているといえます。したがって、 R と N_A の精密値が定まれば、 k 値はこの式より一義的に決まります。 k 値の探究史は、 R と N_A の値の探究史と置き換えることができます。つまり、実験で直接 k 値を測定しようとしても、もともと原子あるいは分子一個あたりの定数ですので、精度のよい測定は困難であって、 k の精密値は R と N_A の精密測定から計算で求められています。しかしながら、理論面から見ると、気体分子運動論において、まず、気体分子一個の運動エネルギーが気体の絶対温度 T に比例する、つまり、

$$\frac{1}{2} m \bar{v}^2 = \frac{3}{2} kT$$

の表式で、 k が現れてきます。ここで、 m は気体分子一個の質量、 v は速度を表しています。これは、ミクロな立場から理論的にみちびかれた気体の圧力 p の式、

$$p = \frac{1}{3} \cdot \frac{Nm}{V} \bar{v}^2$$

と、マクロな立場から実験的にみちびかれた気体の状態方程式、

$$pV = nRT$$

とを比較することによってみちびかれます。ここで、 V は気体の体積、 N は気体の分子数、 n は物質量を表しています。

この表式はクラウジウスによるものですが、彼自身の最初の論文（一八五七）では、数式で理論を展開しながらも、比例定数は単に「定数」と言葉で記しているだけなのです。

ボルツマン定数 k は、もうひとつ別の流れ、エントロピー概念を追求する中でも現れてきます。つまり、古典熱力学におけるエントロピー S の概念が、物質のミクロな状態の数、いいかえると原子レベルで熱力学的状态を実現できる可能性の数（熱力学的確率） W の概念にまで還元できることが明らかになったとき、この両者を結び定数として重要な役割を担うのです。つまり、

$$S = k \ln W$$

なる簡潔な表式が成立します。

この式は、今日ボルツマンの式と呼ばれますが、この場合もまた当のボルツマン自身、この表式を示していませんし、 k の具体的値も提出していません。彼はその概念を言葉でのべたにすぎ